2

IACOBI PELETARII CENOM. IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA

Demonſtrationum Libri ſex.

Ad Carolum Lotharingum, Principem, Cardinalemque ampliſſimum.

Secunda editio, auctior & emendatior: cui & textus Euclidis Græcus additus eſt.

Quid autem præcipuè ad Euclidem contulerit Peletarius, id ad finem libri habes.



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

APVD IOANN. TORNÆSIVM.
CIↃ. IↃC. X.

Digitized by Google

Digitized by Google

AD CAROLVM LOTHARINGVM, PRINCIPEM, CARDINALEMQVE AMPLISSIMVM,

Iacobi Peletarij Cenomani in Euclidis Elementa Geometrica Præfatio.

SOlent, qui docendi munus profitentur, Cardinalis ampliſſime, multa de argumenti ipſius dignitate afferre: vt conſilij ſuſcepti rationem exponant, & animos hominum faciliùs ſibi adjungant. Ego verò ad Geometriam accedens, præter officium & dignitatem mihi facere viderer, ſi ad ejus commendationem, nimis exquiſitum artificium adhiberem. Nam quum cæteræ artes probabili quadam opinione conſtent, certè Geometria (inter Mathematicas ſpectatiſſima) veritatis confirmatione ſeipſam tuetur & commendat. Quumq; res omnes aut ornatu amplificare, aut teſtimonio deprimere, aut denique circuitione inuertere poſſimus: hæc ipſa ſuo innixa præſidio, perpetua, ſimplex, & vniusmodi eſt. Nulla huc controuerſia, nulla diſceptatio incidit, quæ non ſtatim ad veritatis fidem probationemq; referatur. Ejus quippe rationes non perſuadent, ſed cogunt: etiam ordine ipſo, immò adeò Naturæ ductu quodam. Ut enim ab exiguis initijs, Natura ad operis perfectionem & abſolutionem ſenſim peruenit: ita Geometria ab infimis ad altiſſima, rectè & gradatim ſeſe extollit. Quid Puncto ſimplicius? quid Circulo abſolutius? at ex illo omnia emanant, in hoc omnia concluduntur. Ut ne Puncto quidem deſit infinitatis admiratio. Quid enim tam mirabile, quàm à medij Circuli puncto, quod

Centrum vocamus, tot lineas exire, quot ad Peripheriam deſinunt? Iam verò Problemata ipſa & Theoremata, quum alia ex alijs conſequantur, rerum agendarum ſeriem nobis opportunè referunt: monentq́ nihil præpoſterè, nihil ſine conſilio aggrediendum, ſed omnia ad rationis normam eſſe dirigenda. Ad hæc, ſicut Natura noui quippiam aſſiduè molitur, ita Geometria ſemper aliquid egregium diſpicit, exquirit, excogitat. Quamobrem parum intelligenti ſunt judicio, qui Mathematicarum auctoritatem eleuare conantur, tamquam ea ad animi delectationem, non etiam ad vitæ vſum conſtituta ſint. Nihil enim in rebus humanis ferè aliud eſt quod expediat aut juuet, præter ordinem & proportionem: id eſt, in omnibus moderationem. Vbique igitur latet vis quædam Geometriæ: quæ vtrum plus natura habeat an artificij, non ſatis perſpici poteſt: niſi quatenus explicat ipſa exercitatio. In qua meditatione quanto majores progreſſus fecerimus, tanto propiùs ad Deum accedere videmur. Ac quemadmodum Mens illa æterna præteritorum meminit, præſentia cernit, futura perſpicit, ſimul verò omnia amplectitur & moderatur: ita præclarus Geometriæ artifex ſuas cogitationes in vnum collatas, ad rem ſuam conuertit, & ſuum quendam Mundum vniuerſa ſpeculatione intuetur. In diuerſis autem Figurarum formis, quæ rerum varietatem eximiè referunt, incredibilem concipit voluptatem. Quarum quæ ſpeciem habent concinnitatis, rerum vſum & opportunitatem exhibent: quæ obſcuram præſeferunt compoſitionem, earum incommoditatem arguunt, & moleſtiam. Neque tamen in Geometria quicquam tam anorme aut inuolutum exiſtit, quod ad regulam dirigi non poſſit, ſi adſit vis ingenij: Sicut in rerum natura nihil tam difficile aut intempeſtiuum videtur eſſe, quod non ad vſum conuerti poſſit, modò non deſit animi ſolertia. Omnia quippe aut ad vtilitatem, aut ad pulchritudinem, aut denique

nique

nique ad exemplum accommodantur : vt etiam quæ ad perniciem generis humani comparata ſunt, bella, venena, morbi, cæteraq; exitiorum genera, cautiores nos efficiant, & rerum expetendarum vſus reddant ſuauiores. Porrò, Geometricæ poſitiones, quæ operas auxiliarias inter ſe præſtant, omnia in rerum natura mutuis alternisq; ſubſidijs niti & conſiſtere declarant. Quinetiam amicitiæ ipſius jura, in Figurarum ſimilitudine, quarum colligationem Diameter efficit, conſpicua ſunt. Ad ſummam, hæc imago & facies Geometrica ejuſmodi eſt, vt in ea Mundi quandam theorian poſſis agnoſcere. De cujus initijs huc nihil afferre conſtitui. Non ab Aegyptijs, non à Chaldæis, non à Phœnicibus, illius originem requiram. Scientias quippe æternas eſſe ſemper exiſtimaui, atque vt in Mente diuina, ab æterno infixam fuiſſe Mundi conſtitutionem : ſic diſciplinas, cæleſtia quædam ſemina eſſe: quæ in nobis inſita, & pro rata cujuſque portione exculta, fructum edunt. Sed hæc fortaſſe etiam longiùs à nobis ducta ſunt, quàm inſtituti noſtri ratio poſtularet : præſertim quum hæc ipſa in Commentarijs noſtris ſparſim expoſuerimus. In rem igitur præſentem veniant oportet, qui Geometriæ dignitatem intueri & perpendere cupient. Eam Euclides noſter quindecim libris tradidit. Quorum ſex illos, qui Planorum tractationem continent, à nobis demonſtratos, tuo nomini, Cardinalis ampliſſime, dicauimus: ne hoc quidem rerum tumultu, aut temporum conuerſione deterriti. Nam & tu in ſummis grauiſſimisq; occupationibus, artium liberalium cauſſam patrociniumq;, ſingulari ſtudio ſemel ſuſceptum, nunquam deſeruiſti. Noſtros autem labores ſi benigne & gratè, vt confidimus, exceperis : magnam nobis, etiam ſponte currentibus, alacritatem dederis : vt eadem illa tui nominis nuncupatione, totus Euclides quàm poterit cultiſſimus, verſetur inter manus hominum.

IACOBVS PELETARIVS
IOANNI FRATRI, NAVARRÆORVM
GYMNASIARCHÆ S.

QVòd meas in Euclidem Demonſtrationes ampliſſimo Cardinali Lotharingo tua ſponte promiſiſti & recepiſti, pergratum mihi eſt. Atque eo etiam gratius, quòd homines intelligunt, id te nòn tantùm meo in te amore fretum, ſed etiam ſingulari judicio inductum, feciſſe. Virum enim delegiſti ex Principum familia: ſui ordinis ſpectatiſſimum, ſapientiâ, doctrinâ, auctoritate. Equidem apud me antea decreueram, meas lucubrationes his præſertim temporibus, nullius nomine emittere. Sic enim ſtatuebam, in tanta rerum concertatione, ac perturbatione potiùs, Muſas in paruo eſſe numero apud eos qui ſtudiorum adjuuandorum poteſtatem haberent: non quòd eos ſua voluntate à literis alienos eſſe judicarem, ſed temporum neceſſitate diſtractos, ſe ad literaturam aut animo aut cogitatione conuertere non poſſe. Ea etiam re in meo conſilio firmiùs permanebam, quòd ab ijs locis remotus eſſem, in quibus ejus generis occaſiones oportunè captare & vrgere ſolemus. Sed me tua pollicitatio commodè ab inſtituto reuocauit: mihiq́ ſpatium ad cogitandum dedit, Cardinalem à prima ætate in literis educatum, cujus dignitas & amplitudo cum eruditione accreuit ſimul, tot jam hominum doctorum nuncupationibus celebratum, immò publicorum ſtudiorum Principem & auctorem, nullum tempus ab ingenuis artibus alienum habere poſſe. Eſt enim conſtanti omnium ſermone, & rerum ipſarum probatione, quas ſummas gerit, alta quadam mente præditus, & qui mirabili ſolertia ſuis temporibus omnia diuidere nouit. Occurrit tui apud illum non noua notitia, & mei fortaſſe nominis aliqua commendatio. Quibus rebus non leuiter ſpero, nobis hunc aditum honori & ornamento futurum. Id verò totum jam inde tibi acceptum refero, & in eximio quodam numero pono tuorum erga me meritorum. Quæ certè tanta ſunt, quanta à fratre expectare potui aut debui. Te enim ab ineunte mea adoleſcentia ſtudiorum meorum moderatorem habui, & in Philoſophiæ initijs

etiam

etiam præceptorem. Ac pòſt, emergente ætate, ad vitæ institutionem te mihi prudentiſsimum monitorem fuiſſe ſemper cognoui. Nam quum vestris omnium fratrum conſilijs tamdiu paruerim, quamdiu aut ætas aut natura ductus tulit, tibi vni præ cæteris auſcultaui. Scis enim me, Victorio impulſore, totum pene quinquennium in legum ſtudio conſumpſiſſe. Quod institutum mihi nouitatis ſtudio aliquandiu non diſplicuit: certè quum ætas ad maturitatem ſpectare cæpiſſet, meiq́; juris ac mancipij eſſem, vaga illa rerum forenſium tractatione deterritus, ad Philoſophiam redij, & te auctore, ad Medicinam me conuerti. In qua me magnopere delectauit Naturæ locupletiſsima historia: ad eamq́; profeſsionem ſatis libenter meæ vitæ modum direxi & compoſui. Ex illa, me meus Genius ad Magnatum aditum conquirendum interpellauit. Vbi quantùm profecerim, me certè non pænitet. Quod enim præter animi ſententiam accidit, vtrum mea culpa, an meo quodam fato, acciderit, nihil dico: vnum hoc dico, me ex ea affectatione, ad vitæ rationem multa præcepta reportaſſe. Hominum enim diuerſa conſuetudo mihi non parua acceſsione judicium confirmauit: & ſcribendi facultatem comparauit. Nemò enim quicquam laude dignum ſcribet vnquam, niſi qui rerum ipſarum variam cognitionem ad ſtudium illud vmbratile adhibendam ſibi propoſuerit. Quippe quum ad ſcribendum ſit Genius quidam, qui ſi lectione tantùm foueatur, non etiam experientiâ & vſu roboretur: non conſistet, neque ad ætates ferendas idoneus euadet. Atque ea de cauſa, quæ in Poetico genere ſcripſimus, ad temporum memoriam tranſitura ſperamus. Certe Oratio nostra Pacificatoria nos rerum non ignaros eſſe testatur. Quæ verò in Mathematicis ſcribuntur, ex rata & firma veritatis profeſsione, ſuum habent Genium immortalitatis. Poëticen quidem amplexi ſumus, animi impetu & ardore quodam, pòſt etiam ingenij concertatione. Sed deferbuit jam illa laudis contentio nostra. Poëticos illos ſpiritus ſenſim remitto: Mathematicas in perpetuum retineo. Hæc enim ſtudia mihi destinata eſſe ſentio. Quibus quum anteà delectarer, nunc etiam viuo. Quid facerem? honores non ſitio: gloriam non deſidero. Interim tamen ſic viuo (dicam enim apud te ingenuè id quod res eſt) tanquam id quod non postulo expectem. Eas diſciplinas colo & amo, non modò quòd, vt ille de re rustica dicebat, minimè malè cogitantes ſint qui in eo ſtudio occupati ſunt: ſed quòd omnium maximè diuinas eſſe judicem. Theologiam vestram excipio:

niſi

niſi rerum diuinarum cognitio è Mathematicis emerſiſſe concedatur, Platonis teſtimonio, qui Deum ſine fine γεωμετρεῖν exiſtimabat. Nam quid ego de Numeris dicam? quorum conſequutio & natura, imaginem quandam æternitatis refert. Rerum concordiam, animorumq́; ſympathiam euidentiſſimè exhibet Muſica harmonia. Diuini illius opificij principia, & conſtitutionem certiſſimis dimenſionibus firmatam, obijcit Geometriæ ſpeculatio. Denique ad Deum Optimum Max. ſuſpiciendum, animos noſtros erigit rerum cæleſtium contemplatio. Quanquam ſcio te in eo à me valde diſſentire. Mihi enim per literas declaraſti, Mathematicas veſtra Theologia alienas, & prope contrarias eſſe. Equidem illud de te miror: quum eas artes olim docueris, dum Philoſophiæ ſtadium conficeres: per quas etiam vobis aditum ad veſtram diſciplinam præſtruitis. Quid? an exiſtimabimus veteres Academiarum noſtrarum principes, Mathematicas, vt neceſſarias, præſcripſiſſe, vt pòſt demum, tanquam inutiles, immò contrariæ, repudiarentur? Sed non eſt hujus loci hæc diſputatio. Ad propoſitum reuertor. Demonſtrationes noſtras in ſex Libros, qui de Planis ſcripti ſunt, jam tandem emittimus. Quod à nobis citiùs eſſet factum, niſi operis difficultas Typographos eſſet remorata. Te igitur promiſſis libero: & meam fidem jam inde ſingulari quodam pacto apud Cardinalem aſtringo: & Deo juuante præſtabo. Neque enim, niſi perfecta re, conquieſquam vnquam. Vos verò mirum in modum videre cupio, totumq́; Lutetiam veſtram cogito, hujus longinquitatis temporum & locorum pertæſus. Atque eare, hanc profectionis occaſionem mihi eſſe oblatam vehementer etiam atque etiam lætor. Tu interim me fraternè, quod facis, ama. Alexandro, Victorio, & Petro, fratribus, Cenomanos ſalutem meis verbis ſcribes, Iuliano iſtic dices.

Vale. v. Id. Aprilis,

Lugduni.

❧

IACOBI PELETARII CENOM. IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA

Demonſtrationum Liber primus.

Principiorum explicatio.

PRINCIPIA, ſunt quorũ nulla eſt cauſa. Ipſis enim, quatenus Principia ſunt, nihil eſt prius. Atque ob id in diſciplinis tanquam per ſe nota ponuntur: neque probationem recipiunt, ſed probationum ſunt fundamenta. Horum in Geometria triplex genus: Definitiones, Poſtulata ſeu Petitiones, & animi Notiones. Definitiones quidem naturali inſitaq; intelligentia non ſtatim concipimus: ſed in eas, quum proponuntur, ſponte conſentimus: ſic dictante rei cujuſque natura. Quapropter à nonnullis Hypotheſes dictæ ſunt. Petitiones verò, quanuis prima ſpecie non animaduertantur, tamen auditæ facilè conceduntur, ſic dictante ratione. Atque hæ, vt plurimùm, ad Definitiones conſequuntur. Sed animi Notiones in quoſcunque etiam rudiſſimos cadunt. Qui igitur Definitiones & Poſtulata ſubterfugit, is doctrinæ non eſt capax. Nemo enim ad diſceptationem de re aliqua ritè accedit, niſi priùs conueniat quid ſit id de quo ſit diſceptandum, atque in id conſentiat quod ex conceſſis pendet. Sed qui Notiones non recipit, etiam ſenſu communi caret: vnde & animi ſenſa vocantur. Cur ergo Definitiones, quæ interim ſubobſcuræ ſunt, Notionibus præponuntur ab Euclide? Nimirum, quia licet Definitiones non adeò claræ ſint: res tamen quæ definiuntur, ſeſe omnium primas objiciunt: ob idq; primas cognoſcere cupimus, vt appareat Diſciplinæ materia. Quum igitur in Geometricis animi Notiones, Quantitates reſpiciant: ideo Quantitates earumq; ſpecies definiſſe oportuit, vt eſſet in quo notionem animi exerceremus. Horum itaque ordo ſic habet.

DEFINITIONES.

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

Punctũ eſt, quod partes non habet.

Geometria Magnitudines conſiderat, easq́; finitas. Sed quia Magnitudinum partes, naturam totius denominationemq́; retinent, partes enim Linearum, lineæ ſunt: Superficierum, ſuperficies: & Corporum, corpora: alioqui vaga & confuſa eſſet rerum ſubſtantia: Geometria vbique infinitum deuitans (infiniti enim nulla eſt ſcientia) ab eo initium ſumit, quo ſimplicius cogitari nihil poſſit: id verò Punctum vocamus. Nam quum in rebus externis aliquid ſenſui obijceretur minimum: ſanè rationabile fuit, intellectui quoque aliquid dari quo nihil eſſet minus. Punctum igitur in Geometria, propemodùm eſt quod in Arithmeticis Vnitas. Nam ſicut Vnitas eſt Numerorum veluti ſuppoſita materia & origo, quę Numerus non eſt: ita Punctum, Magnitudinis, quum magnitudo non ſit. Illud autem habet mirabile, quòd quum diuiſionem non admittat, eſt tamen cùm in rebus omnibus, tum in Geometria maximè momentaneum: Nihil enim ferè in vniuerſa rerũ cõquiſitione aliud ſpectamus quàm Punctum. Circuli centrum omnium primum quærimus: Quantitates Punctis terminamus, metimur, & diuidimus: vt Punctum aſſequi, nihil aliud ſit quàm ſcopum attingere.

Plato Punctorum hypoſtaſin ſeu ſubſiſtentiam vocat adamantinam: nempe æternam, ſtabilem, incorruptibilem, quæq́; eodem ſemper modo habeat: Vniuerſum circa ipſa conuerti, ac circumquaque in plauſum moueri. Eæ ſunt Epicuri Atomi, omnium rerum ſemina.

Ab negatione autem definit Euclides Punctum, quòd ad ſimpliciſſimum deuenire non poſſimus, niſi ſiquid intelligamus quod magnum non ſit: quippe neque longum, neque latum, neque craſſum.

Punctum autem nonnulli à Signo ſic diſtinguunt, vt Punctum dicant eſſe quod in medio eſt Figuræ: Signum verò, quod in termino, aut alibi quàm in medio. Sed nos hac curio-

ſitate

ſitate contempta, vtrumque ſine diſcrimine vnum & idem eſſe ponimus. Ex Puncti fluxu perpetuo in longum, gigni intelligitur Linea: Quæ ſic definitur,

Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατές.

2 Linea, eſt longitudo latitudinis expers.

Magnitudinum prima eſt Linea: cui ex iis tribus, quæ Puncto negantur, vnum ineſt: nempe longum. Hîc enim ſub latitudine craſſities auditur: quum craſſum ſine latitudine non ſit.

Non igitur ſicut ex accumulatis Vnitatibus fit Numerus, ſic ex additis Punctis fit Linea: ſed ex ipſorum fluxu continuo. Atque in hoc differt Continuum à Diſcreto, quòd Continuum infinitè diuidatur: neque ad Punctum vnquam deueniatur, vt in Diſcretis ad Vnitatem.

Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

3 Lineæ autem limites, ſunt puncta.

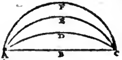
A Puncto Linea oritur, & in idem deſinit. Sed hoc loco dubitatur quonam modo Puncta Lineæ ſint limites, quum Circuli peripheria nullos terminos videatur habere. Sanè Puncta ejus Lineæ limites dicũtur eſſe, quæ terminata eſt. Peripheriam verò, quatenus extrema non habet, Puncta non terminant. Extrema autem ſi ponuntur, ea niſi Punctis deſignari nõ poſſunt: aut ſaltem puncto vno, quod duorum vicem ſupplebit.

Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

4 Linea Recta, eſt quæ ex æquali ſua interjacet puncta.

Hæc generalis eſt definitio Lineæ rectæ: quæ etiam Lineæ ambienti, hoc eſt, quæ Circulum claudit, tribui poteſt. Hanc enim Plato rectam quoque eſſe voluit: reliquas verò ex his duabus mixtas, obliquas vocauit. Quod nos ad decimamquintam Propoſitionem libri tertij probabiliùs oſtendemus. Circulo enim nihil æqualius neque concinnius. Vbique tamen Euclides Rectum à Rotundo ſeu Peripheria diſtinguit: quod & nos obſeruabimus, diſciplinæ cauſſa.

Igitur Linea Recta, eſt à puncto ad punctum via breuiſſima: ſeu, vt Archimedes, minima linearum quæ eoſdem habent limites.



mites. Vt à puncto A ad punctum C, ducitur vnica linea recta A B C. Sed peripheriæ, quales A D C & A E C, infinitæ duci poſſunt.

Ac quemadmodum ex Puncti fluxu in continuum, exit Linea : ita ex Lineæ in tranſuerſum ductu, oritur Superficies : quæ ſic definitur,

Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

5 Superficies, eſt quæ longitudinem & latitudinem tantùm habet.

Superficiei vnum ex tribus abnegatur quæ Solido inſunt, nempe craſſum ſeu profundum. Hanc quidam definierunt terminum eſſe Corporis.

Ac tametſi, Punctum, Linea, & Superficies intellectu tantùm capi videantur, non re exiſtere, neque oſtendi poſſe : habet tamen vnumquodque horum in rerum natura quo repræſentetur. Puncta enim corpuſculis inſecabilibus aſſimilantur, quæ in radiis Solis colludunt : Lineæ radiis ipſis : Superficies vmbris, vt quæ terram nunquam ſubeant : ſeu etiam coloribus, ex Pythagoreorum ſententia. Puncta igitur, atomi ſunt: Lineæ materia : Superficies forma. Atque ex his Corpus, quod longum, latum, & craſſum eſt.

Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.

6 Superficiei extrema, ſunt Lineæ.

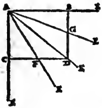
Hoc loco dubiũ mouetur ſimile quod & in terminis ipſius Lineæ : cur Lineas Superficiei extrema eſſe dicat Euclides. Nam ſuperficiei circularis vnica linea terminus eſt. Verùm qui ſuperiorem explicationem acceperit, is etiam in hac facilè conquieſcet. Superficies enim rotunda quomodocumque diuidatur, (ea autem diuiſio fit officio Diametri, aut lineæ cujuſuis abſcindentis) ipſius limites erunt Lineæ. Eadem erit & terminorum Corporis, quæ ſuperficies ſunt, ratio.

Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

7 Plana Superficies, eſt quæ ex æquali ſuas interjacet lineas.

Conu

Conuenit hæc Planæ Superficiei Definitio cum Rectæ Lineæ definitione. Quum itaque recta linea Superficiei ex æquo



incumbit, nẽpe quum omni variè accommodatur loco, ea eſt Superficies Plana. Vt, ſi in Superficie A B C D, linea A B ſuper puncto A fixo ſic circumducta fuerit per puncta C, F, D, G, vt ipſi ſuperficiei æqualiter incumbat, eamq́; ſic radat, vt punctum nullum emineat, donec ipſa peruenerit ad A B lineã.

A plana igitur Superficie ſic excluditur ſphærica, ſeu rotunda, vt à recta linea excluditur Peripheria.

Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ, δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

8 Planus Angulus, eſt duarum linearum in plano ſeſe tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

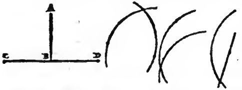
Hæc Anguli definitio antiquorum eſt, peruulgata: quam nos ad Decimamquintam Propoſitionem Tertij apertiùs declarabimus. Habet enim ſenſum tolerabilem & perſpicuum, donec illuc ventum erit. Nos interim tamen Angulum Planum ſimpliciter ſic definimus,

Angulus Planus, eſt duarum linearum in plano ſectio.

Ceſſante enim ſectione, ceſſat Angulus: vt illic probabimus.

Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ, εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

9 Quando autem quæ angulum continent rectæ fuerint lineæ: Rectilineus Angulus vocatur.



Vt, ſi recta A B ſecet rectam C D: fiũt anguli A B C & A B D, Rectilinei. Cæteri autẽ Curuilinei quidem dicũtur, quum à duabus curuis fiunt: Mixti verò, quum à recta & curua.

Οταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι· καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

10 Quum recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos vtrinque æquales fecerit: rectus eſt vterque angulorum. Et quæ ſic cadit linea, perpendicularis eſt ei ſuper quam ſteterit.

Angulus Rectus à quibuſdam definitur eſſe, qui ſibi adjacentem angulum ab eadem linea factum, æqualem habet. Nos verò, vt etiam Quaternarium honoremus, Angulum Rectum eſſe dicemus, quartam partem interſectionis duarum linearũ rectarum. Quum igitur linea lineam ſecans in neutram partem inclinatur, fit angulus Rectus.

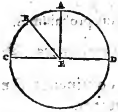
Αμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

11 Obtuſus angulus, eſt Recto major.

Οξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

12 Acutus verò, Recto minor.

In centro Circuli à quo ſemidiametri exeunt, tres Angulorum Rectilineorum ſpecies expreſſæ ſunt & cõſpicuæ. In Circulo enim A B C D, cujus centrum E, duæ ſemidiametri E C & E D in continuum ductæ, vnicam lineam C D Diametrum efficiunt: ſuper quam ſtans ſemidiameter E A, diuidenſq; Semicirculum C A D & totam C D Diametrum per æqualia, facit duos angulos A E C & A E D æquales: atque ob id rectos. Sed B E in eandem C D cadens, & Semicirculum inæqualiter ſecans, facit angulum B E D obtuſum, vtpote recto majorem, maioriq; peripheria comprehenſum: Angulos autem A E B & B E C, acutos: quia recto minores, & ſub minori ambitu contentos.



Neque quiſquam miretur, quòd huc Circulum inducamus ante Circuli definitionem. Eſt enim Circulus Figurarum prima & vltima: omnia probans, & ad omnes oſtenſiones accommoda:

moda: vt nos in Demonſtrationibus ſparſim dicemus. Sed & ipſe Angulorum præcipuus index: Nam ex peripheriæ portionibus, illorum quantitas ſumitur, vt modò exhibuimus.

Ex hac igitur Recti & non recti poſitione,ſtatus conditioq; rerum conſpicitur. Vnica eſt enim Recti conſtitutio:Obtuſi & Acuti, infinitæ. Scilicet rectè faciendi vnica eſt ratio, & ad verum via vna: in diuerſum, innumerabiles.

QVÆSITVM eſt à nonnullis, eſſét ne Angulus quantitas an qualitas. Nam Angulum, vt æqualis aut inæqualis dicitur, quantitatem eſſe volunt: vt autem rectus, obtuſus, aut acutus eſt, qualitatem. Ego verò omnino Angulum vt quantitatem attendi debere puto. Nam etiam quatenus rectus, obtuſus, aut acutus eſt, ipſius ſola dimenſio conſideratur: quod & trium ſpecierum definitiones declarant, quæ ab æquali, majori, aut minori petuntur. Extra hæc, ſeſe exerceant in Prædicamenti conquiſitione qui volent. Hûc enim Dialectica & Phyſica non pertinent.

AT longè major difficultas eſt in ipſius Anguli forma & conſtitutione, cujuſmodi ſit & in quo conſiſtat. Nam quod nonnulli dixerunt, Angulum partem eſſe Superficiei: id probabile non eſt. Nam ſic ex Angulo Triangulum fieret, ducta tertia linea:quod minimè conuenit. Alij in Puncto,& in Linea, & in Superficie ſimul eſſe volunt. Sed hoc rurſus majorem diſquiſitionem parit. Quota enim ipſius pars in Puncto erit?quota in Linea? quota denique in Superficie? At ſi hoc quoque abeſt à veritate, quis erit Anguli ſitus? Nam ſi in Puncto tantùm conſiſtere dicatur: aut erunt omnes Anguli æquales, aut Punctorum inæqualitas erit ponenda:quorum illud apertè repugnat veritati, hoc rationi minimè conſentire videtur. Nihilo magis in Linea aut Superficie ſola eſſe dicetur.

Huic igitur dubitationi,meo judicio, ſic occurrendum, Angulum quidem in vno puncto conſiſtere:ſed inclinationem eſſe quæ majorem ipſum aut minorem efficit. Linea quidem lineam ſecans, Angulum conſtituit: ſed non propterea Angulus pars eſt Lineæ: ſicut nec Lineæ ipſæ ſunt Superficiei partes, quamuis ſine Lineis Superficies eſſe non poſſit quæ ipſam terminent. Neq; igitur Angulus pars erit Superficiei quòd ipſam occludat. In quo ſanè intueri licet, punctum ipſum ſectionis, à

linea

linea ſecante premi & quodammodo anguſtius fieri, pro inclinationis modo. Punctum ergo erit quantitas: minimè. Intellectus enim quod ſemel minutiſſimum receperit, id ampliùs non diuidit: ſed contrahere tamen & conſtringere nihil vetat. Ac nequis nos repugnantia dicere putet, is attendat in Geometria Punctum non conſiderari vt nihil: immò vt aliquid. Et vt in Arithmeticis Vnitatem minuimus, ſic & Punctum ſuo modo in Continuis: ſcilicet vt id, ex quo omnia emergunt, omniũ etiam repræſentationem imaginemq; exhibeat: nempe recti, obliqui, longi, lati, & profundi. Quum igitur Geometria Naturam vbique referat, vt eſt ipſius ſpeculum: cogitemus, ſicut in angulo phyſico duæ lineæ quantumlibet tenues ſe mutuò non poſſunt ſcindere, niſi altera alteri cedat in puncto decuſſationis: ita in linearum Mathematicarum ſectione recta, Punctum quodammodo eſſe quadratum: in obtuſa, hebetius: in acuta, preſſius & anguſtius. Atque hæc intellectus aſſequitur: qui niſi cum natura nunquam conquieſcit. Vnde Puncti imminuendi finem non facit: donec linea cadens cum jacente vna facta ſit. Quum itaque Punctum diuiſionis expers eſſe intellectus ponit: id concipit, vt neque Linea, neque Superficies, neque Corpus ſit. Sed quum ad Angulum deuenit, qui aliam omnino habet conſiderationem à cæteris quantitatibus: tunc quod ſine partibus receperat, id jam minuẽdum aſſumit: ſcilicet, vt, quod paulò antè diximus, id ex quo quantitas naſcitur, naturam etiam quantitatis ſapiat. Atque hæc noſtra eſt de Anguli conſtitutione ſententia. Diu enim nos exercuit hæc Puncti variatio: quam à nemine obſeruatam inuenimus: & ſi modò obſeruata ſit, hactenus diſſimulata eſt. Impedita enim res eſt in diſciplinis ea, quæ quum apparet, demonſtrationẽ non recipit. Quòd ſi quis hac in re habebit quod probabilius ſentiat, huic libenter concedemus. Nihil enim inueſtigandum nobis proponimus præter veritatem.

Ορος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

13 Terminus, eſt quod cujuſque finis eſt.

Quia Puncta, Linearum: Lineæ, Superficierum: Superficies Corporum ſunt termini: moxq; Figuram terminatam eſſe ponit:

ponit: quid Terminus eſſet definire voluit: nempe vniuscujuſque rei finis.

Σχῆμά ἐστι, τὸ ὑπό τινος, ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

14 Figura, eſt quæ ſub aliquo vel aliquibus terminis continetur.

Circulus vno termino, nempe vna linea continetur, vt mox dicemus: ſicut & Corpus ſphæricum vnica ſuperficie. Reliquæ autem figuræ, pluribus terminis: vt Triangulum, Quadrilaterum, ac deinceps planæ Figuræ: Priſma item, Cubus, Columna, Pyramis, & quæ ſunt reliquæ ſolidarum.

Sed videbitur fortaſſe cuipiam Euclides aliter hic ſentire quàm ſuprà ſenſerit in Superficie. Eam enim dixit lineis, non vnica linea terminari. Verùm aliter conſideratur Circulus, vt Circulus eſt: & aliter vt Superficies. Si enim diuidatur Circulus, ipſius pars nulla Circulus erit: Superficiei verò partes, Superficies ſunt. Hujus itaque Definitionis ſenſum ſic collige: vt Circulus, quatenus forma rotunda eſt, vnica linea contineatur: ſed quatenus Superficies, pluribus contineri poſſit: vt illic docuimus.

Vel omnino rectiùs intelligemus, Superficiem lineâ vel lineis terminari.

Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν, ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

15 Circulus, eſt Figura plana, vnâ lineâ contenta, quæ Peripheria appellatur: ad quam ab vno puncto introrſùm exiſtente omnes porrectæ lineæ ſunt æquales.

Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται.

16 Punctum autem illud, Centrum Circuli vocatur.

Hæc Circuli definitio notiſſima eſt: quæ ipſius affectionem, ſeu, vt dicunt, paſſionem explicat. Siquis verò factionem ſeu

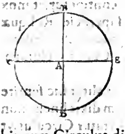
b creat

Digitized by Google

creationem Circuli ſibi exponi petat, inſtar definitionis Sphæræ quam Euclides libro vndecimo daturus eſt: ea erit ejuſmodi:

Circulus, eſt veſtigium lineæ rectæ in plano circumductæ, altero extremorum manente fixo, donec ipſa vnde duci cœpit, redierit.

Vt, ſi linea A B ſuper A puncto duci incipiat in orbem à puncto B, per C, D, & E puncta, donec ipſa rurſus A B facta ſit: deſcriptus erit Circulus B C D E. Atque ex hac deſcriptione, graphicè exprimitur tota Circuli proprietas.



Punctum enim illud fixum A, Centrum dicetur: veſtigium verò à puncto B mobili circumſcriptum, Peripheria. Tota demum linea A B circumducta, Superficiem deſcribit quæ Circulus dicitur. Vnde manifeſtum eſt, omnes lineas à centro Circuli exeuntes, æquales eſſe: quum ſint ex vnius lineæ veſtigio.

NEQVE eſt quòd quiſquam ſe fatiget inquirendo, vtrum ſit prius Rectum an Rotundum. Sed ſi quis ſententiam ferre cogatur: vt Philoſophus, rectè judicabit, ſi vtrumque ſimul eſſe pronunciauerit. Nam & Circulus in plano rotatus, Rectum procreat. Menti quippe nihil prius neq; poſterius. Immò puncta ante lineas: aut lineas ante ſuperficies: aut denique ſuperficies ante corpora fuiſſe, vix cogitatio ipſa complecti poteſt. Sicut apud Philoſophos, Vniuerſum aliquando non fuiſſe, captum animorum excedit: ſemper fuiſſe, ſupra omnem admirationem eſt. Nos autem, quantum cogitatione aſſequimur, omnia ſuo ordine ſtatuere, atque ad artem reducere, conamur judicio, quoad ejus fieri poteſt, probabili, minimeq; fallaci. Ordo enim in Diſciplinis dux certiſſimus. Sed nos hæc rerum varietas exercet: in qua ſatis nobis eſt conjecturã ad vſum accõmodare. Quid enim nos efficere poſſe putamus arte, in iis quæ Natura tam affabrè fecit? aut quid ingenio conſequi, quum de his quæ diuinitùs emanarunt, humanitùs judicamus? Circulus igitur ex ſe ipſe ortus, ex Recto prouenire videtur: infinitus, ac finito ſimilis: omnia continens, vt capaciſſimus & tamen aliquid extra ſe in ſpeciem admittens. Sed nos in hanc rem aliâs vberiùs, Deo juuante, philoſophabimur.

Διάμ

Digitized by Google

Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν, εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

17 Diameter Circuli, eſt linea recta per centrum acta, quæ vtrimque ad peripheriam terminata Circulum bifariam diuidit.

Quum linea A B in figura modò inducta, peruenit ad punctum D oppoſitum: fit vna linea B A D: quæ Diameter eſt Circuli, ipſumq; bipartitò diuidit. Quod Thales Mileſius, qui Geometriam ab Ægypto in Græciam aduexit, primus animaduertit & probauit. Nam ſi linea per Centrum acta, Circulum non diuidat bifariam, non erunt à centro ad ambitum extenſæ lineæ æquales.

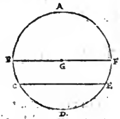
Cæterùm Diameter & Dimetiens Circuli & Quadrati dicitur: immò & Diameter Quadrilaterorum, nulla vocum curioſitate: quamuis horum proprius ſit Diagonius. Axis autem Sphæræ & ſolidorum eſt: vt Coni, Cylindri, & Pyramidis.

Ημικύκλιον δὲ ἐστὶ, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

18 Semicirculus, eſt figura quæ ſub Dimetiente & ea quæ à toto ſublata eſt peripheria, continetur.

Τμῆμα κύκλου ἐστὶ, τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.

19 Sectio Circuli, eſt quæ ſub recta linea & Circuli peripheria majore aut minore Semicirculo continetur.



In Circulo A B C D E, vtrauis Figurarum B A F & B D F, ex linea recta B F per cētrum acta, & linea curua, quam ſubtendit, conflata, Semicirculus dicitur. Sed ex linea C E per centrum non tranſeunte, & peripheriam diuidente, fiunt duæ Figuræ inæquales: C A E, major Semicirculo: & C D E, eodem minor: Atque harum vtralibet, Se-

ctio Circuli dicitur. Vtraque etiam peripheriarum C A E & C D E, Arcus: recta autem C E, Chorda vulgò appellatur.

Hæ tamen duæ Definitiones hûc non ſpectabant, ſed ad tertium librum: niſi fortè Principia omnia, vniuerſo operi communiter præſcribenda dicamus: quæ tamen maluit Euclides in ſingulos libros diſtribuere: Atque ob id, hanc poſteriorem in tertio libro repetit. Poſt Circulum, Figuræ Rectilineæ definiuntur.

Εὐθύγραμμα σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

20 Rectilineæ Figuræ, ſunt quæ ſub rectis lineis continentur.

Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

21 Trilateræ, ſunt quæ ſub tribus rectis continentur lineis.

Figurarum Rectilinearum prima eſt Trilatera. Ex ipſius enim Rectæ lineæ definitione, non poſſunt duæ lineæ rectæ ſuperficiem conſtituere: vnde neque figuram. Nam à puncto in punctum vnicus eſt ductus in rectum. Secunda verò in ordine eſt Quadrilatera.

Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

22 Quadrilateræ, ſunt quæ ſub quatuor rectis lineis comprehenduntur.

Quadrilateræ ad demonſtrationes Geometricas accommodantur, ſicut & Trilateræ, propter ſimplicitatem: ob idq; inter principia definiuntur. Quæ verò quaternarium excedunt, obſcuriorem habent tractationem.

Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

23 Multilateræ, ſunt quæ ſub pluribus quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur.

Rectilinearum Figurarum multitudo infinita eſt: quæ à numero laterum nomen habent. Sed generali vocabulo Multilat

laterræ dicuntur.

Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

24 Inter Trilateras porrò Figuras, Æquilaterum Triangulum, eſt quod tria habet latera æqualia.

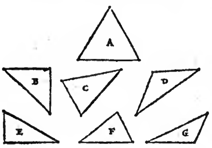
Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

25 Iſoſceles autem, quod duobus lateribus æqualibus & tertio inæquali conſtat.

Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσας ἔχον πλευράς.

26 Scalenum verò, eſt quod ſub tribus inæqualibus lateribus continetur.

His tribus poſtremis Definitionibus, tres Triangulorum ſpecies exponuntur. Harum prima, eſt Æquilateri. Nam quæ omni ex parte æqualitas eſt, ſimplicior, & cognitu facilior. Huic proxima eſt duorum laterum æqualitas, quæ baſi inæquali ſubtenduntur. Atque hoc Triangulum Iſoſceles vocatur. Tertia ſpecies eſt, quæ vnum tantùm æquale habet: hoc eſt, tria inæqualia. Æquilaterorum vna eſt conſtructio: in ipſis enim perpetuò ſunt anguli æquales. Sed in Iſoſcelibus & Scalenis, anguli infinitis modis variantur.



Æquilaterum eſt A. Iſoſcelia ſunt B, C, & D. Scalena E, F, & G Triangula.

Ἔτι τε, τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

27 Ampliùs, Trilaterarum Figurarum Rectangulum Triangulum, eſt quod vnum rectum habet angulum.

Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

28 Amblygonium, cujus obtuſus eſt vnus angulorum.

Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

29 Oxygonium, quod tribus conſtat acutis.

Rectangula ſunt, B Iſoſceles, & E Scalenum: Amblygonia ſeu obtuſangula ſunt, D Iſoſceles, & G Scalenum: Oxygonia ſeu Acutangula ſunt, A Æquilaterum, C Iſoſceles, & F Scalenum. Æquilaterum perpetuò Oxygonium eſt. Reliquæ ſpecies Rectangulæ, Amblygoniæ, & Oxygoniæ eſſe poſſunt.

Poſt Trilateras ſequitur Quadrilaterarum diuiſio vniuerſa: quarum perfectiſſima eſt Quadrata.

Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι, καὶ ὀρθογώνιον.

30 Quadrilaterarum autem Figurarum, Quadratum, eſt quod æquilaterum & rectangulum eſt.

Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

31 Altera parte longius, eſt quod rectãgulum quidem eſt, ſed non æquilaterum.

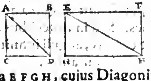


Figura Quadrilatera A B C D, cujus Diameter A D, eſt Quadrata: conſtatq; duobus Triangulis Iſoſcelibus rectangulis, A B D & A C D. At Figura E F G H, cujus Diagonius E H, eſt altera parte longior, conſtatq; duobus Scalenis E F H & E G H, rectangulis.

Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

32 Rhombus, eſt figura quadrilatera æquilatera, ſed non rectangula.

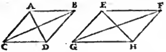
Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

33 Rhomboides verò, eſt quæ ex oppoſito bina

lat

latera æqualia, binosq; angulos æquales habet: ſed neque æquilatera, neque æquiangula eſt.

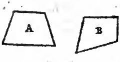
Rhombus, quatuor habet latera æqualia, duasq; Diametros inæquales: vt Quadrilaterum A B C D: atque hinc duos angulos æquales oppoſitos, obtuſos: vt B A C & B D C: inde verò duos oppoſitos æquales, acutos: vt A C D & A B D.



At Rhomboides habet bina latera oppoſita æqualia. Vt in E F G H Figura, duo latera E F & G H oppoſita, inter ſe ſunt æqualia, duoq; E G & F H inter ſe. Cæterùm in hoc conuenit cum Rhōbo, quòd duas Diametros inæquales: binos item angulos oppoſitos æquales, hinc obtuſos, illinc acutos habet.

Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, τραπέζια καλείσθω.

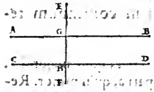
34 Præter hæc autem reliqua Quadrilatera, Trapezia dicantur.



In his nulla eſt laterum definita æqualitas, ſed promiſcua conſtitutio: propter quod anormia ſunt. Vt duo A & B Quadrilatera.

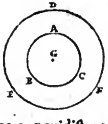
Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

35 Paralleli, ſeu æquidiſtantes lineæ rectæ, ſunt quæ in eodem plano exiſtentes, in vtramque partem productæ neutrobi conueniunt.



Quum Recta linea, rectas lineas ſecans, ipſis æqualiter ſuperſtat, aut in eaſdem æqualiter inclinatur, vt quum anguli ſectionum fuerint mutuò æquales: hæ lineæ ſectæ, ſunt Paralleli, ſeu Æquidiſtantes.

Vt ſi duas lineas A B & C D ſecet linea E F in punctis G & H: fuer



fueritq; angulus A C E æqualis angulo C H G, duæ A B & C D lineæ, erunt paralleli: quia in vtramuis partem protrahantur, nunquam concurrent.

Lineæ autem Circulorum, Paralleli dicũtur, quæ ſuper eodem centro ductæ ſunt. Vt duæ lineæ A B C & D E F ſuper eodem cẽtro G, æquidiſtant inter ſe.

PETITIONES.

Ηιτήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

1 Ab omni puncto in omne punctum rectam lineam ducere.

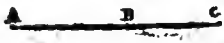
Duo puncta, vbicunque aſſignentur, in eodem plano eſſe intelliguntur: atque ob id, ab vno ad alterum via eſt aliqua breuiſſima. Quapropter à puncto A ad punctum B nemo negauerit lineam rectam duci poſſe: ſic neque ab A ad C. Et quia eadem ratione B & C in eodem ſunt plano: fit vt tria quælibet puncta in eodem ſemper exiſtant plano. Ex quibus ſuperficies Triangula conflabitur: qualis eſt A B C. Atque hæc eſt rerum colligatio. Hîc enim binarius ternarium: ternarius quaternarium, immò & ſenarium includit: quum vnumquodque punctorum vice duorum ſit. Quartum autem punctum erit ſeptimum & aduentitium. Atque ideo ad ſuperficiem conflandam, quarto puncto non eſt opus, quòd Senarius ſit numerus perfectus.



Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

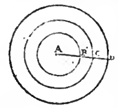
2 Rectam lineam terminatam in continuum rectumq; producere.

Inter Quantitates non datur tam magna, quin major dari poſſit: neque tam parua, quin minor. Rectam itaque A B ad pũctum C produci poſſe



ſe nemo niſi indocilis inficiabitur.

Καὶ παντὶ κέντρῳ, καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

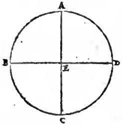


3 Omni centro & interuallo Circulum deſcribere.

Superficies plana in ambitum extendi infinitè poteſt: ſicut ab omni puncto in omne punctum recta linea duci: quò fit vt Circulus omni interuallo deſcribi poſſe cõcedatur.

Καὶ πάσας αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

4 Omnes angulos rectos inter ſe æquales eſſe.



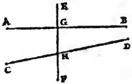
Hæc conſtat ex decima Definitione. Rectus enim angulus, fit quum recta linea in rectam lineam ad perpendiculum cadit: hoc eſt, æqualiter ipſi ſuperſtat. Id verò ex Circuli centro euidentiſſimè apparet. Vt ex A B C D, qui duabus Diametris ſe in E centro ſecantibus diuiditur in quadrantes, qui quatuor angulos qui ad E, ſubtendunt æquales, quia rectos.

Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

5 Quum in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores & in eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit: rectas lineas productas tandem concurrere ad eam partem in qua anguli duobus rectis minores exiſtunt.

Vt ſi in rectas lineas A B & C D, recta incidens E F, & ſecans ipſas in punctis G & H, duos angulos interiores B G H & D H G ſimul ſumptos fecerit duobus rectis minores: ipſæ rectæ lineæ A B & C D concurrent versùs duo pũcta B & D. Si enim ponatur

Digitized by Google



B G perpendicularis ipſi E F: Scilicet anguli qui ad G, recti: ſit autem D H G minor recto: erit D H inclinata ſuper E F versùs E: Atque ob id, angulus D H G minor angulo D H F, ex conuerſione decimæ Definitionis: ſicq; minor recto: quoniam ſi eſſet æqualis, vterque eſſet rectus, per eandem Definitionem: cujus contrarium hîc ponimus. Igitur ob inclinationem, ipſa C D producta tandem conueniet cum A B: idq; ob eam cauſam, quòd duo anguli B G H & D H G, duobus rectis ſunt minores.

Hoc tamen Poſtulatum inter Definitiones reponi poterat. Exponit enim lineas non Parallelos, ſicut decima Definitio Parallelos. Ad hæc, quum in ſpeciem Theorematis enunciaretur, nos in Poſtulatum redegimus.

ANIMI NOTIONES.

Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

1 Quæ eidem ſunt æqualia, & inter ſe ſunt æqualia.

Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

2 Et ſi æqualibus æqualia addantur, tota erunt æqualia.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

3 Et ſi ab æqualibus æqualia auferantur, quæ relinquuntur erunt æqualia.

Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

4 Et ſi inæqualibus æqualia adjiciantur, tota erunt inæqualia.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ ἐστὶν ἄνισα.

5 Et ſi ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua erunt inæqualia.

Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

6 Quæ

6 Quæ ejuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia.

Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἥμισυ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

7 Et quæ ejuſdem ſunt dimidium, inter ſe ſunt æqualia.

Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

8 Quæ inter ſe ipſa conueniunt, & inter ſe ſunt æqualia.

Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

9 Totum eſt ſua parte majus.

Καὶ δύο εὐθεῖαι, χωρίον οὐ περιέχουσιν.

10 Duæ rectæ lineæ Superficiem non concludunt.

Hæc verò Axiomata per ſe ſic manifeſta ſunt, vt nulla oſtenſione indigeant. Horum tamen vltimum quidam in ordine Poſtulatorum poſuerunt: neque omninò abſq; ratione. Nam & Poſtulati naturam ſapit: & ad definitionem Rectæ Lineæ conſequitur, vt jam antè monuimus. Sed in hoc non inſiſtemus. Vtrobique enim Principij notiſſimi vim habet.

De Hypotheſi, Demonſtratione, Problemate, & Theoremate.

HYpotheſis, quantùm huc attinet, eſt ſubjectio, ſeu fundamentum ratiocinationis. Hanc re exiſtere non eſt neceſſarium: probabilem eſſe ſatis eſt: eamq; legem duntaxat habet, ne quid abſurdi importet. Vt quum conuenerit Figuram Figuræ eſſe æqualem, aut majorem, atque ex hoc deducatur argumentatio: ea æqualitas aut inæqualitas, Hypotheſis eſt: A qua diſcedere, conſtante argumentatione, non licet. Demonſtrationem verò appellant Dialectici, Syllogiſmum qui faciat ſcire: nempè qui ex probatiſſimis concludat. Atque hæc à Geometria ortum habet. Immò omnis, quæ ad verum perducit, probatio, Geometrica eſt. Vt veriſſimè dictum ſit, neminem ſcire verum à falſo diſtinguere, cui Euclides non fuerit familiaris. Quòd ſiquis attentiùs ſciſcitabitur, cur in demonſtrandis Propoſitionibus non

eluceat forma Syllogiſmi, ſed tantùm conciſa quædam membra Syllogiſmorum appareant: is ſic habeat, præter dignitatem eſſe, quæ in ſcholis docentur, ea, quum in rem præſentem ventum ſit, ex præſcriptis formulis obſeruare. Neque enim Orator, quum ad forum accedit, quæ à Rhetore excepit dictata, in digitis collocat: immò id agit, vt quum præceptorum maximè meminit, nihil minus quàm Rhetoricen cogitare videatur. Sic in opere Geometrico, quum nil aliud ſpectemus, quàm vt ſcopum exquiſitè aſſequamur, Syllogiſmi figuram omninò diſſimulamus. Quæ tamen ſi exigatur, è probationibus Geometricis ad viuum exprimitur. Sed nos ea reſecamus, quæ repetita non modò tædium, ſed etiam obſcuritatem parerent. Quod inter Demonſtrationes facilè perſpicient qui judicio præditi erunt. Demonſtrationum autem concluſiones, ſunt Problemata & Theoremata.

Problemata, ortus Figurarum comprehendunt, ſectiones, additamenta: eaq; omnia in arte, quæ facienda proponuntur. Atque, vt, in Philoſophia, Problemata dicuntur dubia quædam, quæ nobis examinanda & ſoluenda proponimus: ſic in Geometricis, Problemata vocamus conſtructiones ex arte depromptas: à quibus ſpeculationes oriuntur, ſeu Theoremata: nempe quæ factas Figuras comitantur, proprietates & affectiones: quæq; ſcientiæ ipſi inhærent & ipſam efficiunt. Nam in aſſertione conſiſtunt præceptorum, ſicut Problemata in conſtitutione Figurarum. Ad ſummam, Problemata materiam quandam praxinq; artis referunt: Theoremata, formam, ſcientiæq; meditationem. Ex vtriſque Euclides Elementa Geometrica contexuit, vt operi viciſſim ſubſeruiebant, ordine quidem concinniori quàm ante illum quiſquam: licet neque Archimedes, neque Ptolemæus, neque vllus antiquorum ſe ordini aſtrinxerit: nimirum quòd inſtitutiones Geometricæ tam integræ dari vix poſſint, quin aliquid deſiderari, aut ſupereſſe, aut conuenientiorem collocationem exigere videatur. Geometria enim perpetuam meditationis materiam alit. Sed hæc in aliud tempus reponimus. Nunc Euclidem ex profeſſo ducem ſequemur.

PROBL

PROBLEMA PRIMVM,

PROPOSITIO PRIMA.

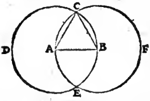
Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης, τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Super data recta linea, Triangulum æquilaterum conſtituere.

Triangulum, aut aliam quamuis Figuram, ſuper data linea conſtituere, eſt ex ipſa linea vnum latus Figuræ facere.

Sit data linea, A B. Volo ſuper A B conſtituere Triangulum æquilaterum.

Centro quidem A, ſpatio verò A B, deſcribo Circulum B C D E, per tertiam Petitionem: Rurſusq; centro B, & eodem ſpatio B A, deſcribo alterum Circulum A E F C. Atque hi duo Circuli



ſe mutuò ſecabunt in duobus punctis, vt in E & C: quum vtriuſque communis ſit Semidiameter A B. A duobus igitur terminis A & B, ad alteram interſectionum, vt ad C, duco A C & B C lineas, per primam Petitionem. Dico jam A B C Triangulum ſuper A B linea conſtitutum, eſſe æquilaterum.

Quoniam enim A B & A C exeunt à centro A ad peripheriam B C D E: erit, per Centri & Circuli definitionem, A C ipſi A B æqualis. Rurſus, quoniam B A & B C exeunt à centro B ad peripheriam A E F C: erit, per eandem Definitionem, B C eidem B A æqualis. Duæ igitur A C & B C vni A B ſunt æquales: ob idq;, per primam animi Notionem, tres A B, A C, & B C inter ſe ſunt æquales. Quare A B C Triangulum ſuper A B linea conſtitutum, eſt æquilaterum: Quod faciendum fuit.

PVLCHRE Euclides primam ac ſimpliciſſimam Figurarum cum vltima & capaciſſima conjunxit: ſcilicet Triangulum cum Circulo. Vtriuſque enim vſus immenſus: Trianguli, ob

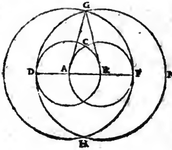
Digitized by Google

ſimplicitatem: Circuli, ob perfectionem. Æquilateri verò dumtaxat meminit, quòd hæc Trianguli ſpecies eadem ſemper ſit & vniusmodi, ob laterum & angulorum æqualitatem: Reliquas duas ſpecies prætermiſit, Iſoſceles & Scalenum. Infinitæ enim eorum figuræ.

Id vnum tamen non omittam, Trianguli Iſoſcelis longè maximum eſſe vſum. Nam quum in Geometricis omnia ferè æqualitate & recto probentur, duorum autem æqualitas ſatis ſit ad tertium quippiam demonſtrandum: quæcumque Demõſtrationes fiunt Trianguli æquilateri adminiculo, eæ quoque per Iſoſceles abſoluuntur: Iſoſceli verò rectus angulus ineſſe poteſt, Æquilatero nunquam. Quumq; Triangula nil aliud ſint, quàm dimidiæ partes Quadrilaterorum: Iſoſceles dimidium erit Quadrati, Æquilaterum verò minimè, ſed ſolius Rhombi. Æquilaterum quidem hoc habet priuilegij, quòd tres ipſius anguli perpetuò ſint æquales: Iſoſcelis nunquam, ſed duo tantùm. Tres item anguli cujuſlibet Æquilateri, tribus ſemper alterius Æquilateri ſingulatim æquales, quamuis ſingula vnius latera, ſingulis alterius lateribus ſint inæqualia. Sed hæc ad demonſtrationes parum conferunt. Præcipuus igitur Æquilateri vſus eſt in ſolidis: ſed in ſuperficiebus ferè nullus, niſi fortè ad Figuras Circulo inſcribendas, vbi etiamnum vt Iſoſceles conſideratur. Hac nos ratione inducti, Appendicem Campani non omiſimus, quatenus Iſoſceles Triangulum ſuper data linea collocandum proponit. Scaleni verò poſitionem, vt inutilem negleximus.

Super data recta linea, Triangulum Iſoſceles conſtituere.

Manente eadem Æquilateri deſcriptione, protrahatur linea A B data, donec vtrimque pertingat peripherias Circulorum in punctis D & F. Tum centro A, ſpatio verò A F, deſcribatur Circulus F G H: ruſuſq; centro B, ſpatio verò B D, deſcribatur alter Circulus D G K: quorum vterque alterum ſecabit in duobus punctis, vt in G & H, non ſecus quàm in ſuperiori deſcr



deſcriptione. A punctis itaque A & C duco lineas A G & B G. Dico Triangulum A B G ſuper A B linea conſtitutum, eſſe Iſoſceles.

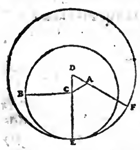
Quum enim A B & A D lineæ ſint æquales, nempe vtraque à centro ad peripheriam: eademq; ratione, B A & B F æquales: erunt duæ A D & B F inter ſe æquales, per primam animi Notionem. Quapropter, addita communi A B, erunt, per ſecundam Notionem, A F & B D æquales. Sed A G ipſi A F æqualis: vtraque enim à centro ad peripheriam: quapropter & eadem A G ipſi B D æqualis. Atqui B G ipſi B D eſt æqualis, ex ipſa Centri & Circuli definitione. Duæ igitur A G & B G vni B D ſunt æquales: ob idq; inter ſe æquales, per primam animi Notionem. Quare, quum vtraque major ſit quàm A B (major enim eſt B D quàm A B): erit Triangulum A B G Iſoſceles. Quod erat faciendum.

PROBLEMA 2. PROPOSITIO II.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æquam rectam lineam ducere.

Sit datum punctum A, data verò linea recta B C. Volo ad A punctum, ipſi B C rectæ lineæ æqualem lineam ducere. Alterum terminorum ipſius B C connecto cum puncto A: ſcilicet terminum C, ducta, per primam Petitionem, recta linea C A. Tum centro C, interuallo verò C B, deſcribo Circulum B E B, per tertiam Petitionem. Cujus peripheria ſi tranſeat per punctum A, habeo quod volui: Erit enim, per Centri definitionem, C A ipſi C B æqualis. Sin aliorſum tranſeat: conſtituam ſuper C A, Triangulum æquilaterum A C D, per primam Propoſitionem, (ſeu Iſoſceles, per ea quæ illic addidimus, nihil enim refert, modò A D & C D latera ipſius ſint æqualia): Cujus latus D C protraham ad punctum E peripheriæ: Tum centro D, interuallo autem D E, deſcribam alterum Circulum E F E: & ad punctum F ipſius peripheriæ protraham



latus

latus D A. Dico A F eſſe ipſi B C æqualem.

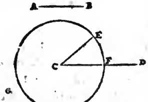
Duæ enim C B & C E ſunt æquales: quum ſit vtraque à centro ad peripheriam. Duæ item D E & D F, eadem ratione æquales. Sed D C & D A æquales, ex conſtructione: quum ſint latera Trianguli Æquilateri: aut Iſoſcelis ſi placet. Si itaque auferantur D C & D A æquales, ex D E & D F æqualibus: remanebunt, per tertiam animi Notionem, C E & A F æquales. At B C ipſi C E oſtenſa eſt æqualis. Duæ igitur B C & A F ipſi C E æquales: ob idq; & inuicem æquales, per primam animi Notionem. Quare ad punctum A, ducta eſt F A ipſi B C æqualis. Quod erat faciendum.

PROBLEMA 3, PROPOSITIO III.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Datis duabus rectis lineis inæqualibus, à majori lineam minori æqualem abſcindere.

Sint duæ lineæ A B & C D inæquales, quarum minor A B. Volo ex C D abſcindere partem ipſi A B æqualem.



Ad punctum C duco E C ipſi A B æqualem, per ſecundam Propoſitionem. Ac centro C, interuallo verò C E, deſcribo Circulum E F G: qui ſecabit majorem C D in aliquo puncto: & ſecet in F. Dico C F eſſe æqualem A B.

Eſt enim ipſa æqualis lineæ C E. Sed & A B eidem C E æqualis. Quare, per primam Notionem, C F æqualis A B. Quod erat faciendum.

THEOREMA 1, PROPOSITIO IIII.

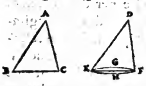
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι.

Si duo Triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint alterum alteri, & angulos binis æquis

later

lateribus contentos æquales: baſis quoque baſi æqualis erit, ac reliqui anguli æquis lateribus contenti mutuò æquales: totum denique Triangulum toti Triangulo æquale.

Sint duo Triangula A B C & D E F, quorum vnius duo latera ſint æqualia duobus lateribus alterius: ſcilicet latus A B æquale lateri D E: & latus A C lateri D F: ſitq; angulus A æqualis angulo D. Dico baſin B C baſi E F eſſe æqualem: Angulum item B angulo E, & angulum C angulo F: ac totum Triangulum toti Triangulo æquale.

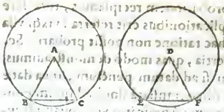


Superponam triangulum A B C, triãgulo D E F: vt angulus A cadat ſuper angulum D, latusq; A B ſuper latus D E, & A C ſuper D F. Eritq;, per octauam animi Notionem, vt nec anguli nec latera ſeſe excedant. Cadent namque duo puncta B & C ſuper duo E & F. Sicq; linea B C ſuper lineam E F cadens, erit ipſi æqualis: atque ea ratione angulus B æqualis angulo E, & angulus C angulo F: & totum triangulum toti triangulo æquale: quum inter ſe ſic conueniant. Nam ſi non congruat linea B C cum linea E F, congruentibus punctis B & C ipſis E & F punctis: ſed cadat intra triangulum, vt linea E G F: aut extra, vt linea E H F: duæ lineæ claudent ſuperficiem, contra vltimam animi Notionem. Quare duo triangula A B C & D E F omni ex parte inter ſe æqualia. Quod fuit demonſtrandum.

HÆC eſt vulgata omnium Interpretum Demonſtratio, ſi modò hæc Demonſtratio dici debeat. Nam ſi linearum figurarumq; ſuperpoſitiones in probationem recipiamus, tota ferè Geometria hujuſmodi applicationibus erit referta: vixq; vlla occurret Propoſitio, quæ hac ratione non poſſit probari. Secunda enim jam indè ac tertia, quas modò demonſtrauimus, ſic probari poterant. Nam ſi ad datum punctum, linea datæ lineæ æqualis ducenda ſit: illico tranſlatâ lineâ ad ipſum punctum, abſolutum erit negotium: Applicatio verò, quamuis ſuperpoſitione ſit tolerabilior, tamen in Geometria repudiatur: immò ne lineam quidẽ tranſportare licet, vt ſecundùm ipſius magnitudinem, Circulum deſcribamus: quin priùs æqualis li-

 nea

nea ducta ſit. Alioqui ſecunda prorſus vacaret. Tum ſi à majori linea, minor ſit abſcindenda: quid aliud quàm majori minorem ſuperponemus, vt quod ſuperat reſecemus? Sed hoc quàm ſit à Geometriæ dignitate alienum, eorum judicio relinquo qui Demonſtrationis vim & energiam animo cócipiunt. Quid ergo huc afferemus, vt Euclidem à reprehenſione vindicemus? Neq; enim ex tam paucis, quas hactenus præmiſit, Propoſitionibus, hoc Theorema confirmari poſſe videtur. Huic objectationi, meo judicio, ſic occurri poterit: vt dicamus, hoc Theorema per ſe clarum eſſe, neq; probatione egere: ſed Definitionis cujuſdam loco habendum eſſe. Nam quum de re aliqua ſermonem inſtituimus, ea nobis tacitè per definitionem ſubit in animum: Non enim duos angulos æquales eſſe cogitabo, niſi quid ſit æquales eſſe angulos concipiam. Quod reſpiciens Euclides, angulorum æqualitatem proponere, atque eadem opera definire voluit: vt hoc Theorema pro Definitione haberemus. Nemo enim ſignificantiùs explicabit angulorum æqualitatem, quàm ſi dixerit duos angulos æquales fieri, quum duo latera vnum angulum continentia, duobus alterum angulum continentibus fiunt æqualia, & baſes, quæ latera connectunt, æquales. Conſtat enim angulum tantum eſſe, quanta eſt duarum linearum ipſum continentium apertio, ſeu diductio: hanc verò tantam eſſe, quanta eſt baſis, hoc eſt, linea ipſas connectens. Atque, vt claré dicam, tantus eſt angulus B A C, quanta eſt remotio lineæ A C ab ipſa A B; tanta verò efficitur remotio, quantam exhibet linea B C. Hoc autem in Iſoſcelibus eſt euidentius. Sint enim duo Iſoſcelia A B C & D E F: quorum vnius duo latera A B & A C duobus D E & D F alterius ſint æqualia: angulusq; A angulo D. Ac



poſitis centris in A & D punctis, ducantur duo Circuli: prior ſecundùm A B, alter ſecundùm D E ſpatium. Horum prior manifeſtò tranſibit per B & C: alter verò per E & F puncta: quum A B & A C, itemq; D E & E F ſint æqualia, & à centro vtrimque exeuntia. Atque, ex definitione æqualium angulorum, erunt arcus B C & E F æquales. Angulor

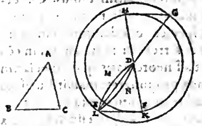
gulorum enim magnitudo deſignatur ex arcubus Circulorum, qui per extremas lineas, quæ angulos continent, tranſeunt. Ac conuerſo modo, æquales anguli, atque æqualibus lineis comprehenſi, æquales ſubtendunt peripherias. Quũ enim æqualia ſint ſpatia B C & E F, ea æqualibus rectis lineis claudi oportet: propterea quòd recta linea, eſt à puncto ad punctum via breuiſſima. Atque, haud diſſimili judicio, ex laterum ratione & baſium, quanta ſit angulorum magnitudo æſtimabimus. Cur ergo Euclides hoc inter Theoremata repoſuit, non inter Principia præmiſit? Nimirùm, quum ſpeciem quodammodo mixtam Principij & Theorematis præ ſe ferret: Principij, quòd in cõmuni animi judicio conſiſteret: Theorematis, quòd ſpeciatim triangula triangulis comparanda proponeret: maluit Euclides inter Theoremata referre: præſertim quum multa haberet capita, Principium verò ſimplex ac velut nudum eſſe debeat. Ex hoc præterea axiomate, tanquam ex locupletiſſimo Demonſtrationum themate, multę Propoſitiones conſequi debebant, ejuſdem prope facilitatis & judicij: quas, quamquàm erant notiſſimæ, inter Principia annumerari non conueniebat. Paucis enim Principiis Geometriam contentam eſſe oportebat: immò multa Principia conſultò ſupprimuntur, ne ſit onerosa multitudo: vt etiam quæ exprimuntur, tantùm ad exemplum exprimi videantur. Huc accedit, quòd primum Theorema facile, perſpicuum, ac ſenſui obuium eſſe debebat, pro Geometriæ lege, quæ ex paruis humilibusq; initiis, in progreſſus mirabiles ſeſe extollit.

Hujus itaque Propoſitionis veritatem non aliunde quàm à communi judicio petemus: cogitabimusq; Figuras Figuris ſuperponere, Mechanicum quippiam eſſe intelligere verò, id demum eſſe Mathematicum. Iam verò, quum fuerit confeſſum duo triangula inuicem eſſe æquilatera, ipſa quoque inter ſe æqualia fateri erit neceſſarium. Etenim nulla euidentiori ſpecie æqualitas Figurarum dignoſcitur, quàm ex laterum æqualitate: quamquam Circulorum æqualitas ex diametris definitur: ſed non aliam ob cauſam, quàm quòd linea obliqua ſui copiam adeò apertè nòn facit vt recta: Cujus menſuram facilè capimus, ac per eam, obliquarum inter ſe comparationem facimus.

At ſi hæc ſuperpoſitio aliqua ratione admittenda ſit, tole-

rabilior ſanè fuerit hoc qui ſequitur modo:

Manente duorum triangulorum A B C & D E F conditione, continuabo E D vſque ad G punctum, per primam Petitionem: & ponam D G æqualem A B, per ſecundam Propoſitionem. Atque itidem continuata F D, ponam D H æqualem A C. Tum ſuper puncto D, ducam duos Circulos: alterum ſpatio D G, alterum ſpatio D H. Quorum prior manifeſtò tranſit per punctum



E, quum ſint D E & D G æquales: alter verò per punctum F, ob eandem rationem. Iam à puncto D duco lineam rectã D L ad E punctum: quæ omnino tranſibit ſuper D E. Nam ſi extrà tranſeat, vt D M L aut D N L: duæ rectæ lineæ concludent ſuperficiem, contra vltimam animi Notionem. Itidem ab eodem D puncto, ducam lineam D K: quæ etiam efficietur eadem cum linea D F. Ac demum linea L K ducta efficietur eadem cum linea E F. Iam verò manifeſtum eſt lineam D L eſſe æqualem lineæ D G, ac propterea ipſi A B, ex conſtructione & animi Notione: lineam quoque D K eſſe æqualem D H, ſeu A C: atque angulum L D K eſſe æqualem angulo E D F, immò eundem: ac propterea æqualem angulo B A C: ſpatiumq; comprehenſum à lineis D L, & D K, eſſe omnino æquale ſpatio comprehenſo à lineis A B & A C. At ſpatium L D K clauditur linea æquali, immò eadem cum linea E F. Et ſpatium igitur B A C claudetur linea æquali ipſi E F lineæ. Quare æqualis E F ipſi B C. Quod erat demonſtrandum.

Hinc patent reliqua Theorematis capita: nempe reliquorum angulorum inter ſe, & duorum triangulorum æqualitas. Neque eſt quòd contendat quis, eandem eſſe vtrobique rationem applicationis triangulorum. Aliud nanque eſt, Triangula tranſponere, quàm per ſimile & æquale demonſtrare. Probatio enim hæc vltima è Circuli pendet officio.

THEOREMA 2. PROPOSITIO V.

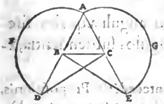
Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις

λήλαις ἴσον).

Iſoſcelium Triangulorum qui ad baſin ſunt anguli, inter ſe ſunt æquales: Et productis æqualibus lineis, qui ſub baſi ſunt anguli, inter ſe quoque ſunt æquales.

Sit triangulum A B C, cujus duo latera A B & A C ſint æqualia. Dico angulum A B C æqualem eſſe angulo A C B: Et ſi protrahantur A B & A C, vt ad D & E puncta: angulum D B C æqualem eſſe angulo E C B.

Ponam, per tertiam Propoſitionem, lineam A D æqualem lineæ A E: ductiſq; D C & E B, intelligam duo triangula A B E & A C D. Et quoniam duo latera A B & A E trianguli A B E, ſunt æqualia duobus lateribus A C & A D trianguli A C D: & angulus A vtrique communis: erit, per antecedentem, baſis B E, baſi C D æqualis: & angulus E angulo D, angulusq; A B E, angulo A C D. Rurſus intellectis duobus triangulis B C D & C B E, erunt duo latera B C & C D trianguli B C D, æqualia duobus lateribus C B & E B trianguli C B E. Et quia angulus D vnius, æqualis eſt angulo E alterius, vt jam probauimus: erit, per antecedentem, B C D triangulum, ipſi C B E triangulo æquale: ac propterea angulus B C D, angulo C B E æqualis. Quum itaque totus angulus A B E probatus ſit toti angulo A C D æqualis: ablato B C D à toto ABE, ablatoq; C B E à toto A C D: ſupererunt A B C & A C B anguli, per communem Notionem, æquales: Quod eſt prius. Et quoniam, per ipſam antecedentem, angulus B C E ipſi C B D angulo eſt æqualis: Patet ſecundum.



Atque, vt oſtenderemus quantum poſſit vbique Circulus, deſcripſimus A F D ſemicirculum, ſecundùm ſpatium B A: cujus centrum B: & alterum A G E, ſecundùm ſpatium C A: cujus centrum C. Nam integros Circulos deſcribere non erat neceſſarium. Vbi, ex Centri & Circuli definitione, conſtat lineas A B, B D: A C & C E æquales eſſe inter ſe: quum exeant à centris Circulorum æqualium: ac propterea A B & A E æquales inter ſe, ex communi Notione. Ac tum procedet demonſtratio modò poſita,

ſita, meo judicio facilior. Triangulorum enim æqualitas ſeſe euidentiorem exhibet.

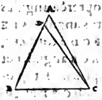
Hic etiam obiter monebimus, hanc Propoſitionem in cõmuni judicio poſitam eſſe, vt ſuperiorem. Nam ſi duo triangula pro vno intelligamus; ſcilicet triangulum A B C, cujus baſis A C: & triangulum A C B, cujus baſis A B: quum duo latera A B & B C vnius, ſint æqualia duobus A C & C B alterius, baſiſq; A C æqualis baſi A B: erit, ex definitione æqualium angulorum, ſeu per antecedentem, A B C angulus, æqualis A C B angulo: Quod eſt prius. Tum, ex poſteriori noſtra conſtructione, de duobus angulis B C E & C B D idem erit judicium: quum probatæ fuerint baſes B E & C D æquales.

THEOREMA 3. PROPOSITIO VI.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Cujuſcumque Trianguli duo anguli æquales fuerint, duo quoque latera, illos angulos ſubtendentia, æqualia erunt.

Hæc eſt Conuerſa prioris partis antecedẽtis Propoſitionis. Sit triangulum A B C, cujus duo anguli B & C ſint æquales. Dico latus A B eſſe æquale lateri A C.



Nam, ſi æqualia non ſint; majus ſit A B: ſi fieri poſſit: à quo reſcindatur D B æquale ipſi A C, per tertiam Propoſitionem: vt ſint duo triangula A C B & D B C. Et quoniam duo latera D B & B C, trianguli D B C, ſunt æqualia duobus lateribus A C & C B, trianguli A C B: & angulus B æqualis angulo C toti, ex hypotheſi: erit, per quartam, baſis B C, baſi A B æqualis: & angulus D C B angulo A B C æqualis. Quare, quum angulus A C B, angulo A B C ſit poſitus æqualis: erit, per primam animi Notionem, angulus D C B, angulo A C B æqualis, pars toti: quod eſſe non poteſt.

Animadvertendvm, Conuerſas Propoſitionum in vniuerſum eſſe veras, ſicut & Principiorum. Quum enim dicimus, Quæ ſunt vni æqualia, inter ſe ſunt æqualia: ſimul cognoſcimus, ſi vnum quippiam fuerit duobus æquale, hæc duo inter

Digitized by Google

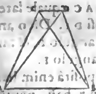
ter ſe æqualia eſſe: Et, Si duo reliqua æqualia fuerint, & partes ab vtraque ablatæ æquales: tota quoq; conſtat fuiſſe æqualia. Horum itaque Conuerſas reticuit Euclides vt notiſſimas: Propoſitionum verò expreſſit, quòd minùs ſimplices eſſent, neque magis per ſe notæ, quàm Directæ ipſæ: Deinde, quòd non ſtatim ad ſuas Directas conſequerentur, vt ad Principia ſuæ: & nonnunquam externis probationibus egerent, vt in ſequentibus paſſim occurret.

THEOREMA 4. PROPOSITIO VII.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Si à duobus punctis lineam terminantibus duæ lineæ exeuntes, concurrerint: ab iiſdem punctis ad eandem partem duæ aliæ non educentur, his duabus, & vtraque ſuæ conterminæ, æquales.

Sit linea A B, à cujus terminis A & B, exeant duæ lineæ A C & B C concurrentes ad punctum C. Dico duas alias lineas, vt A D & B D, ab iiſdem punctis A & B: & ad eandem partem educi non poſſe, quæ duabus A C & B C vtraque ſuæ conterminæ æquales ſint: ſcilicet A D ipſi A C, & B D ipſi B C.

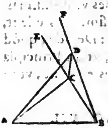


Quod ſi fieri poſſit, tum concurrent A D & B D intra triangulum A B C, aut extra (neque enim in A C aut B C concurrent: eſſet namque pars toti æqualis.) Si ergo concurrant extra triangulum; aut altera illarum ſecabit triangulum, aut neutra. Et ſecet priùs altera, nempe A D, trianguli latus B C: & connectatur C D: vt duo ſint triangula A C D & B C D.

Et quoniam trianguli A C D, duo latera A C & A D ſunt æqualia: erit angulus A C D æqualis angulo A D C, per quintam Propoſitionem. Itidem, quia trianguli B C D, duo latera B C & B D ſunt æqualia; erunt duo anguli B C D & B D C æquales. Et quia angulus B D C eſt major angulo A D C: erit angulus B C D major angulo A C D: per animi Notionem: Nam ſi duo æqualia, ſint majora tertio: erunt & majora eo quod ipſi tertio eſt æquale.

quale. Erit igitur pars major toto: Quod fieri non poteſt.

Si verò neutra ſecuerit triangulum: connectam D C: & producam B C & E D ad E & F puncta, vt duo ſint anguli E C D & F D C, ſub baſi C D.



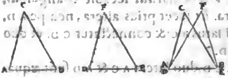
Et quoniam duo latera A C & A D trianguli A C D, ſunt æqualia: erunt anguli A C D & A D C, per quintam Propoſitionem, æquales. Rurſus, quia duo latera B C & B D trianguli B C D, ſunt æqualia: erunt duo anguli E C D & F D C ſub baſi, æquales, per alteram partem ejuſdem. Quia ergò angulus E C D minor eſt angulo A C D: erit angulus F D C minor angulo A D C, totum parte. In idem abſurdum intrudetur, ſiquis A D & B D dixerit conuenire intra triangulum.

THEOREMA 5, PROPOSITIO VIII.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχει δὲ καὶ βάσιν τῇ βάσει ἴσην· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Si duo Triangula duo latera duobus lateribus mutuò æqualia habuerint, & baſin baſi æqualem: angulos quoque illis æquis lateribus contentos æquales habebunt.

Sint duo triangula A B C & D E F: ſitq; latus A C æquale lateri D F, & B C æquale E F: baſiſq; A B æqualis baſi D E. Dico angulum C eſſe æqualem angulo F, & angulum A angulo D, & angulum B angulo E.



Superpoſitâ enim baſi A B ipſi D E baſi, neutra excedet alteram: quum ſint æquales. Tum ſi angulus C conuenit cum angulo F: erit totum triangulum toti triangulo æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, per quartam Propoſitionem: quum ſint duo latera A C & B C duobus D F & E F æqualia. Si verò punctum C non cadat ſuper F punctum, ſed cadat extra: tunc à duobus punctis D & E, duæ lineæ exeuntes A C & B C, concurrent: ſimulq; D F & E F ad eandem

dem partem, binæ ſuis conterminis erunt æquales: Quod per antecedentem fieri non poteſt.

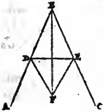
Hanc demonſtrandi rationem in quarta hujus abundè refutauimus. Quare hæc Propoſitio tamquam per ſe nota habenda eſt. Quis enim negauerit duas Superficies eſſe æquales, quarum latera & quantitate & numero ſunt æqualia? Vel ea demonſtrabimus ratione quam illic tradidimus.

PROBLEMA 4, PROPOSITIO IX.

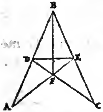
Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Datum angulum biſariam diuidere.

Sit datus angulus A B C, quem oportet in duo æqualia diuidere. Lineam A B notabo puncto fortuito D: & ex linea B C reſecabo, per tertiam Propoſitionem, B E ipſi B D æqualem: & connectam D E. Tum ſuper D E conſtituam, per primam Propoſitionem, triangulum æquilaterum D E F: & ducam B F lineam. Hanc dico eſſe quæ diuidit angulum B datum in duo æqualia: ſcilicet duos angulos qui ad B, eſſe æquales. Intelligo enim duo triangula D B F & E B F. Et quoniam duo latera B D & B F, trianguli BDF, ſunt æqualia duobus lateribus B E & B F, trianguli B E F: illiusq; baſis D F, hujus baſi E F, æqualis: erit, per antecedentem, angulus D B F, angulo E B F æqualis: Quod facere oportuit.



Hanc Demonſtrationis formulam penè ad verbum adſcribunt omnes: ſed certè non ſatis firmam. Quid enim ſi aduerſarius contendat, vnum ex lateribus trianguli æquilateri ſuper D E conſtituti cadere in alteram linearum A B aut C D: vt in ſubjecta Figura triangulum C D E ſit æquilaterum? Tunc non erit locus ducendæ lineæ B F, propterea quòd eſſet eadem cum B C. Occurrendum itaque fuit huic dubio per quintam hujus, poſitis D A & E C æqualibus, ductaq; A E linea. Illic enim probatum eſt, latera C D & C E æqualia eſſe non poſſe: quum ſint duo anguli C D E & C E D inæquales. Ac tum ſtabit

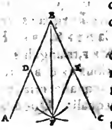


Demonſtratio.

Sed & ex hac poſteriori conſtructione, pulchra oſtenditur ratio hujuſce Problematis demonſtrandi. Quum enim duæ lineæ A E & C D ſurſùm ductæ ad puncta oppoſita D & E ſeſe maniſeſtò ſecent: ſi ducatur linea ab angulo dato B ad punctum interſectionis earum, vt linea B F: hæc diuidet angulum ipſum in duo æqualia.

Nam, per ea quæ ibidem demonſtrata ſunt, & ex quarta hujus: ſunt ambo triangula A D E & C E D inter ſe æquilatera & æquiangula: propterea quòd duo anguli A D E & C E D ſunt, per ſecundam partem quintæ, æquales: & duo latera A D & D E æqualia duobus C E & E D: ob idq; duo anguli C D E & A E D æquales. Vnde, per ſextam, duo latera D F & E F, trianguli D E F, æqualia. Intellectis itaque duobus triangulis B D F & B E F, procedet Demonſtratio vt in priori deſcriptione.

Sed & tota negotij hujus ratio è Circulò depromitur: hoc eſt, ab æqualitate. Vtrum enim ſuper linea D E conſtituatur triangulum Æquilaterum an Iſoſceles, nihil intereſt: modò ad concurſum duorum laterum æqualium ducatur linea: quæ hoc loco eſt linea B F.



Punctum verò concurſus, hoc eſt, punctum F, in interſectione duorum Circulorum æqualium ſitùm erit: quorum centra D & E: vt in poſtremo Schemate: in quo ductis lineis D F & E F, conſtabit Demonſtratio. Nam quum duo latera B D & D F, trianguli B D F, ſint æqualia duobus B E & E F, trianguli B E F, baſiſq; B F vtrique communis: erunt duo anguli qui ad B inter ſe æquales. Satis autem eſſe viſum eſt ſi duorum Circulorum interſectionem appingeremus: ſicut & deinceps faciemus, compendij cauſa.

Hic etiam animaduertes, trianguli Iſoſcelis vſum in Demõſtrationibus firmiorem eſſe quàm Æquilateri.

PROBLEMA 5. PROPOSITIO X.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην, δίχα τεμεῖν.

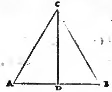
Datam rectam lineam terminatam in duo æqualia

ſec

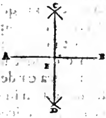
Digitized by Google

ſecare.

Sit data linea A B ſecanda in duo æqualia. Super hanc conſtituo triangulum Æquilaterum (vel Iſoſceles, in idem enim recidit) ſitq; A B C. Cujus angulum C, per antecedentem, diuido in duo æqualia, ductâ lineâ C D. Dico lineam A B bipartitò diuiſam in puncto D. Intellectis enim duobus triangulis A C D & B C D : erunt duo latera A C & C D, trianguli A C D, æqualia duobus B C & C D, trianguli B C D : & angulus C vnius, æqualis angulo C alterius. Quare, per quartam, erit baſis A D æqualis baſi D B: Quod erat faciendum.



HVIVS quoque Problematis compendium è Circulo pendet. Poſitis enim centris in A & B punctis, liberisq; interuallis, ſed æqualibus : quæ vtrimque ad oppoſitas interſectiones ducctur linea, ſecabit A B per æqualia : Qualis eſt hoc loco linea C D, quæ in puncto E, lineam A B æqualiter diuidit. Intelliguntur enim duci A C & B C : vt fiant A E C & B E C triangula inter ſe æquilatera.

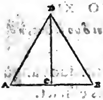


PROBLEMA 6, PROPOSITIO XI.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Data recta linea, à puncto in ea dato lineam ad perpendiculum erigere.

Sit data recta linea A B, & in ea datum punctum C : à quo linea perpendicularis excitanda ſit. Pono C B æqualem A C, per tertiam: & ſuper totam A B conſtituo, per primam, triangulum A B D Æquilaterum (vel Iſoſceles, ſemper intelligo): Et à puncto C excito lineam C D. Hanc dico eſſe perpendicularem ad punctum C.



Quoniam enim duo triangula A C D & B C D, ex ipſa conſtructione, ſunt inter ſe æquilatera, &, per octauam, æquiangula:

 gula:

gula: erunt duo anguli qui ad C æquales, ac propterea recti, per decimam Definitionem. Quare, per eandem, linea C D perpendicularis: Quod erat faciendum.

Hîc etiam ſatis agnoſcitur Circuli vſus, eadem omnino deſcriptione obſeruata quam in ſuperiore exhibuimus. Illic enim anguli qui ad E, fuerunt æquales: ac propterea recti.

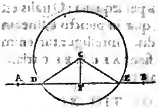
PROBLEMA 7, PROPOSITIO XII.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ad datam rectam lineam interminatam, à puncto extra ipſam dato perpendicularem ducere.

Sit data linea interminata A B: punctum verò extra ipſam datum C: à quo ad ipſam A B ſit ducenda perpendicularis.

Ponam centrum in puncto C, & deſcribam Circulum, qui tantus ſit, vt ſecet A B in duobus punctis, vt in D & E: Ductiſq; lineis C D & C E, facio triangulum C D E: Cujus angulum C diuidat in duo æqualia, per nonam, linea C F demiſſa in D E latus, ſecans ipſum in F puncto. Hanc dico eſſe perpendicularem ſuper A B. Eritq; argumentatio eadem quæ in antecedente.



Quum enim duo latera C D & C F, trianguli C D F, ſint æqualia duobus lateribus C E & C F, trianguli C E F, & angulus C vnius æqualis angulo C alterius: erit, per quartam, baſis D F æqualis baſi E F: & duo anguli qui ad F æquales, ob idq; recti, per decimam Definitionem. Quare linea C F perpendicularis ſuper A B: Quod erat conſtitutum.

THEOREMA 6, PROPOSITIO XIII.

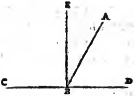
Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθάς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Quum recta linea ſuper rectam ſteterit: duos angulos aut rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea A B ſtet ſuper rectam C D. Dico duos angulo

los A B C & A B D, eſſe aut rectos, aut duobus rectis æquales.

Nam ſi ipſa A B perpendicularis fuerit, ſatis liquet angulos eſſe rectos, per Conuerſionem decimæ Definitionis. Sin autem inclinet in limitem D: erigam ſuper C D, per vndecimam, à puncto B perpendicularem B E. Ex qua jam ſtructura ſatis patet propoſitio. Nam quum angulus A B C tanto major ſit angulo C B E recto quantus eſt angulus A B E: ſitq; alter angulus A B D tanto minor angulo D B E itidem recto, quãtus eſt idem ipſe angulus A B E: ablato quod illi abũdat, vt addatur quod huic deeſt; fient duo anguli recti.



Scilicet, ſi ab angulo A B C obtuſo, auferatur angulus A B E: manebit C B E rectus. Tum ſi idem A B E addatur angulo D B A acuto: efficietur angulus D B E rectus. Quapropter hîc non opus eſt aliâ argumentationis formâ. Eſt enim ex iis quæ intellectum turbare potiùs quàm juuare poſſit. Satis enim manifeſtum eſt, duos angulos, nempe A B C obtuſum, & A B D acutum, æquale, immò vnum & idem, complecti ſpatium cum duobus angulis C B E & D B E rectis.

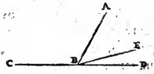
THEOREMA 7. PROPOSITIO XIIII.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Si ad aliquod rectæ lineæ punctum duæ rectæ lineæ coierint, duosq; angulos cum ipſa aut rectos, aut duobus rectis æquales fecerint: ambæ in continuum erunt & linea vna.

Sit linea recta A B: ad cujus punctum B duæ rectæ coëant, C B & D B: duoq; anguli C B A & D B A, aut ſint recti, aut duobus rectis æquales. Dico ambas C B & B D ſibi eſſe in directum: ſcilicet, C D eſſe lineam vnam.

Si enim non ſit linea vna, tunc C B continuata, verbi gratia, ad punctum E, tranſibit ſupra B D, aut infra. Tranſeat ergo ſuprà, ſi fieri poſſit: vt ſit C E linea vna.



Quum itaque recta linea A B ſuper rectam C E cadat: erunt, per antecedentem, duo anguli A B C & A B E, duobus rectis æquales. Rurſus, quum duo anguli A B C & A B D ſint duobus rectis æquales, per hypotheſin: erunt, per primam Notionem, duo anguli A B C & A B E, æquales duobus angulis A B C & ABD. Communis auferatur A B C: relinquetur angulus A B E, per tertiam animi Notionem, angulo A B D æqualis, pars toti: Quod eſt abſurdum. Eadem ratione probabitur C B protracta non cadere infra B D. Erit igitur C D linea vna. Quod erat oſtendendum.

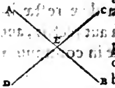
Sed & primo ſtatim intuitu ſic ratiocinabimur. Duo anguli C B A & A B E, ſunt pars duorum C B A & A B D. At C B A & A B D ſunt æquales duobus rectis, per hypotheſin. Quare non erunt duo C B A & A B E æquales duobus rectis, ne ſit pars toti æqualis.

THEOREMA 8, PROPOSITIO XV.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

Si recta linea rectam lineam ſecuerit, angulos ſectionis oppoſitos æquales efficiet.

Sit recta linea A B, ſecans rectam C D in puncto E. Dico angulum A E C, æqualem eſſe angulo D E B: & angulum B E C, æqualem angulo A E D.



Quoniam enim duo anguli A E C & C E B, per decimamtertiam, duobus rectis ſunt æquales: itemq; duo anguli C E B & D E B, duobus rectis æquales: erunt, per primam Notionem, duo anguli A E C & D E B, æquales duobus C E B & D E B. Ablato igitur communi C E B, ſupererunt, per tertiam Notionem, duo anguli, A E C & D E B, æquales. Similiter probabuntur duo anguli A E D & C E D æquales.

Ex hac conſequitur illud,

Duæ lineæ rectæ ſe decuſſantes, quatuor angulos rectos faciunt, aut quatuor rectis æquales.

Conu

Conuerſam hujus decimæquintæ adſcripſimus in hæc verba,

Si quatuor rectæ lineæ ab uno puncto exeuntes, quatuor angulos fecerint, quorum bini oppoſiti æquales fuerint: bina aduerſa lineæ in rectum ſibi erunt, & linea una.

Sint quatuor lineæ, A B, A C, A D, & A E, exeuntes à puncto A, conſtituentes quatuor angulos ad ipſum A punctum: quorum angulus B A C ſit æqualis angulo D A E: & angulus B A D, angulo C A E. Dico B E & C D eſſe duas tantùm lineas: hoc eſt, duas B A & A E eſſe ſibi in cõtinuum, & vnicam efficere lineam: duas itidem C A & A D vnicam.



Sin aliter: ponatur, ſi fieri poſſit, E F linea vna: & C G itidem vna. Quum itaq; recta E A incidat in C G rectam: erunt duo anguli E A C & E A G, per decimamtertiam, duobus rectis æquales. Quumq; recta G A ſuper rectam E F incidat: erunt, per eandem, duo anguli F A G & F A G, duobus rectis æquales. Communi igitur ablato E A G: erit per communem ſententiam, angulus E A C, æqualis angulo F A G. Sed & ipſe E A C poſitus fuit æqualis angulo B A D. Erit ergo B A D ipſi F A G æqualis, pars toti: Quod eſſe non poteſt. Idem omnino proueniet abſurdum, in quamcumque partem protrahantur lineæ. Quare B E vna eſt linea, & C D vna: Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 9, PROPOSITIO XVI.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, μείζων ἐστί.

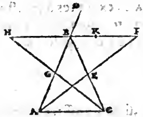
Omnis Trianguli vno latere producto, exterior angulus vtrolibet interiori oppoſito major eſt.

Sit Triangulum A B C, cujus latus A B protrahatur ad punctum D. Dico angulum D B C, majorem vtrolibet angulorum A C B & B A C.

Diuidam B C æqualiter, per decimam Propoſitionem, in puncto E: & connectam A E; quam protraham ad punctum F: & ponam E F æqualem ipſi A E, per tertiam: & connectam F B: vt

vt duo ſint triangula A E C & F E B.

Primùm itaque oſtendemus ipſum D B C angulum, majorem eſſe angulo B C A interiori. Quoniam enim duo latera A E & E C, trianguli A E C, ſunt æqualia duobus lateribus E F & E B, trianguli F E B: & angulus E vnius, per antecedentem, angulo E alterius æqualis: erit, per quartam, angulus E B F ęqualis angulo E C A. Sed angulus D B C major eſt angulo E B F. Quare, per animi Notionem, erit & major angulo E C A: Quod erat probandum.

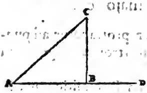


Eadem ratione probabimus angulum C B D, majorem eſſe angulo C A B: diuiſa ſcilicet B A in duo æqualia, in puncto G, ductaq; C G & protracta ad punctum H, vt ſint C G & H G æquales: ac demum connexa H B, & protracta in K punctum. Intelligo enim duo triangula A C G & G B H: Quorum latera A G & C G, lateribus B G & H G ſunt mutuò æqualia: & angulus G vnius, per antecedentem, angulo G alterius æqualis: &, per quartam, angulus G B H, angulo G A C: &, per antecedentem, & animi Notionem, angulus D B K eidem G A C æqualis. At D B C major eſt quàm D B K: Quare & major quàm G A C: Quod erat demonſtrandum.

Linea H B protracta eſt ad K: quoniam adhuc non conſtat H B & B F eſſe in directum: quamuis res ipſa ſic habeat. Sed eſt Mathematici, dubitationibus quibuſcumque occurrere.

ALITER. Sit triangulum A B C, cujus latus A B protrahatur ad punctum D. Dico angulum D B C majorem eſſe vtrolibet angulorum B A C & A C B.

Quoniam enim duæ lineæ A C & B C coëunt in puncto C, & in ipſas incidit recta A B: erunt, per conuerſum modum quintæ Petitionis, duo anguli interiores & ex eadem parte, ſcilicet A B C & C A B, duobus rectis minores. Sed anguli A B C & D B C, per decimamtertiam, duobus rectis ſunt æquales. Duo igitur ipſi A B C & D B C majores ſunt duobus A B C & B A C. Quare, dempto communi A B C, relinquetur



ang

Digitized by Google

angulus D B C major angulo B A C. Eadem ratione, quum duæ lineæ B A & C A coëant in puncto A, & in eas recta incidat C B: erunt duo anguli interiores A B C & A C B duobus rectis minores. Sed A B C & D B C duobus rectis ſunt æquales. Sunt igitur duo anguli A B C & D B C duobus A B C & A C B majores. Quare, ablato communi A B C, ſupererit vt angulus D B C major ſit angulo A C B: Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 10, PROPOSITIO XVII.

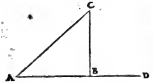
Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι.

Bini anguli cujuſlibet Trianguli, quomodocumque ſumantur, duobus rectis ſunt minores.

Poterat commodè hoc Theorema cum antecedente connecti. Illo enim cognito, ſtatim hoc notum euadit: ſicut Euclides poſtea facturus eſt in ea Propoſitione quæ eſt ordine trigeſima ſecunda. Vtriuſque enim par eſt ratio & conſecutio.

Sit Triangulum A B C. Dico binos ipſius, quomodocumque ſumantur, angulos minores eſſe duobus rectis.

Protracto enim latere D B ad punctum D, quum angulus B exterior, ſit, per antecedentem, major vtrolibet angulorum D & C: idem ipſe B exterior cum B interiori, ſint, per decimamtertiam, duobus rectis æquales: erunt, per communem Notionem, angulus A & angulus B interior, duobus rectis minores: ſimilitérque angulus C & idem B interior, duobus rectis minores: Quod erat demõſtrandum.



Sic igitur inſtituetur argumentatio. Angulus A interior cum angulo B exteriori eſt æqualis duobus rectis, per decimamtertiam: ſed angulus A (vt & angulus E) cum angulo B interiori, per antecedentem, minor eſt duobus angulis B, interiori & exteriori. Eſt ergo angulus A (vt angulus C) cum angulo B interiori, minor duobus rectis: Quod erat demonſtrandum.

Sed &, ſine antecedentis adminiculo, argumentari poſſumus per Conuerſam quintæ Petitionis, & per decimamtertiam

f. Prop.

Propoſitionem: ſicut in ſuperiori fecimus.

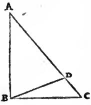
THEOREMA 11. PROPOSITIO XVIII.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Majus latus cujuſlibet Trianguli, majorem ſubtendit angulum.

Sit Triangulum A B C, cujus latus A C ſit majus latere A B. Dico angulum A B C, majorem eſſe angulo B C A.

Ex latere A C majori abſcindam, per tertiam, A D æquale ipſi A B: & connectam B D.



Intellectis igitur duobus Triangulis A B D & B C D, erunt duo anguli A B D & A D B, Trianguli A B D, per quintam, inter ſe æquales. Atqui angulus A D B major eſt, per decimamſextam, angulo B C D interiori oppoſito: Ob idq; angulus A B D eodẽ angulo B C D major. Quare & angulus A B C totus, multo major ipſo B C D angulo: Quod erat oſtendendum.

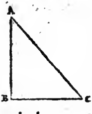
Quòd ſi latus A B ponatur majus latere B C: iiſdem argumentis probabitur angulus C major angulo A: reſecto A B ad æqualitatem B C. Ac in ſumma, binorum quorumcumque laterum comparatio iiſdem rationibus nitetur, reſciſſo ſemper majore ad æqualitatem minoris.

THEOREMA 12. PROPOSITIO XIX.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Major angulus cujuſlibet Trianguli, majori etiam lateri opponitur.

Sit Triangulum A B C, cujus angulus B major ſit angulo C. Dico latus A C majus eſſe latere A B.



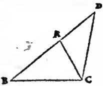
Primùm enim æquale eſſe non poteſt latus A C lateri A B: Eſſet enim, per quintam, angulus B æqualis angulo C, contra hypotheſin. Minus etiam non erit: Minor enim eſſet angulus B angulo C, per antecedentem, contra hypotheſin. Hoc Theorema annecti poterat ſuperiori.

THEOREMA 13, PROPOSITIO XX.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Duo latera cujuſlibet Trianguli reliquo ſunt majora, quomodocumque ſumpta.

Sit Triangulum A B C. Dico duo latera A B & A C ſimul ſumpta, reliquo B C eſſe majora.

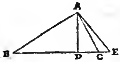


Protraham B A ad punctum D, & ponam A D æqualem ipſi A C, per tertiam : & connectam C D. Et quoniam duo anguli A C D & A D C ſunt, per quintam, æquales : erit B C D major ipſo A D C: quum ſit major quàm A C D. Vnde, per antecedentem, latus B D majus erit latere B C. Atqui latus B D æquale eſt lateribus A B & A C. Sunt igitur latera A B & A C majora latere B C : Quod fuit demonſtrandum.

Eadem erit probandi ratio, ſi bina quæuis latera cum tertio comparentur.

Ex recto etiam demonſtrabimus in hunc modum. Sit Triangulum A B C : cujus latus B C, lucidioris doctrinæ gratiâ, ponatur maximum trium laterum : vt quum probatum fuerit de maximo, nulla ſit de vtrouis reliquorum controuerſia. Dico duo latera A B & A C ſimul ſumpta, majora eſſe latere B C.

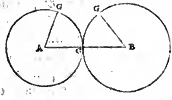
A puncto A in rectam B C, per duodecimam, demitto perpendicularem A D: vt duo ſint Triangula A B D & A D C. Et quia vterq; angulus qui ad D rectus eſt : erit, per decimãſeptimã, angulus A D B major angulo B A D : &, per decimamnonam, latus A B majus latere B D, latuſq; A C majus latere D C. Sed B D & D C conſtituunt ipſum B C. Erunt igitur duo latera A B & A C majora latere B C : Quod erat demonſtrandum.



Quòd ſi linea perpendicularis ſit eadem cum latere A C, tùm B C non erit maximum laterum, per decimamſeptimam & decimamnonam. Quapropter erit deducenda perpendicularis ad A B latus maximum. Si verò aduerſarius contendat, lineam perpendicularem cadere extra triangulum, vt lineam

A E: tum angulus A C B major erit, per decimamſextam, angulo A E C recto, exterior interiori. Vnde A B per decimamſeptimam & decimamnonam, majus eſſet vtrolibet laterum A C & B C, contra hypotheſin.

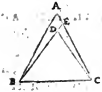
Hoc nobis Theorema ratio magnitudinum præſcribit. Nam quum ſuper duos terminos A & B lineæ A B ſtatuerimus duas lineas A G & B G, quæ ſimul iunctæ tantùm ſint æquales ipſi A B: ſi ambæ inclinari cœperint altera alteram versùs, ſtantibus fixis A & B punctis: duo ipſarum puncta, quæ ad G, non priùs coibunt, quàm ſuper A B jaceant, & vnum punctum G efficiant. Quod ex Circulis ſecundùm ambarum linearum quãtitatem ductis, poſitisq; centris in A & B, eſt manifeſtum. Hi enim nuſquam ſecant inter ſe, vt hîc adſcriptum vides: Ob idq;, ex his tribus lineis nunquam conflabitur Triangulum. Duæ enim A G & B G circumductæ nunquam egredientur peripheriam. In hoc etiam extat præcipua quædam vis, &, vt ſic dicam, auctoritas Circuli: immò Naturæ quædam præſtantia, quæ in Geometricis paſſim relucet.



THEOREMA 14. PROPOSITIO XXI.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

Si à duobus terminis vnius laterum Trianguli duæ lineæ exeuntes, intra Triangulum coïerint: hæ reliquis duobus Trianguli lateribus minores erunt, & majorem angulum continebunt.

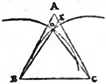


Sit Triangulum A B C: & à duobus terminis B & C lateris B C, exeant duæ lineæ B D & C D, coëuntes intra Triangulum in puncto D. Dico duas, B D & C D, minores eſſe duabus A B & A C: & angulum B D C majorẽ angulo B A C. Producam B D donec ſecet A C in puncto E. Et

Et quoniam duo latera A B & A E Trianguli A B E, ſunt, per vigeſimam, majora tertio B E: Et, per eandem, D E & E C majora tertio D C: erunt quatuor A B, A E, D E, & EC, majora tribus B D, D E, & D C. Commune auferatur D E: erunt tria A B, A E, & E C (ea ſunt A B & A C) majora duobus B D & D C: Quod eſt prius.

Altera pars ſic probatur. Angulus B E C Trianguli B E C, major eſt, per decimamſextam, angulo B A C: Et, per eandem, angulus B D C major ipſo B E C. Major ergo B D C ipſo B A C: Quod erat demonſtrandum.

Prior pars facilè patebat, deſcriptis duobus Circulis ſecundùm ſpatium duarum B D & C D, poſitiſq; centris in B & C. Omnino enim duo Circuli ſecabunt hinc inde duo latera A B & A C. Ac tum erit æqualitas inter duo ſegmenta duaſq; B D & C D: Sicq;, per nonam notionem, erunt A B & A C majores ipſis D B & D C. Neque enim tranſibunt Circuli per punctum A, repugnante ſeptima Propoſitione.



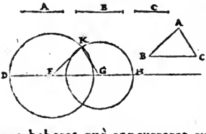
PROBLEMA 8. PROPOSITIO XXII.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι. Δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας.

Ex tribus rectis lineis, quæ tribus datis rectis lineis ſint æquales, Triangulum perficere: Modò tamen duæ illarum, quomodocumque ſumptæ, reliqua ſint majores: quoniam vniuſcujuſque Trianguli duo latera omnifariam ſumpta, reliquo ſunt majora.

Sint tres lineæ datæ A, B, C, quarum duæ quomodocumque ſumptæ, tertia ſint majores. (Alioquin aptæ non eſſent ad Triangulum conſtituendum, per vigeſimam). Volo ex tribus lineis, quæ ſint his tribus datis æquales, Triangulum conficere.

Ex linea quapiam interminata abſcindo, per tertiam, D F æqualem lineæ A: & F G æqualem lineæ B: & G H æqualem li-



neæ c. Tum centro F, ſpatio verò F D, deſcribo Circulum D K D: itemq́; centro G, ſpatio verò G H, deſcribo Circulum H K H. Hi duo Circuli ſe omnino ſecabunt inter ſe. Ducta enim linea à centro F ad peripheriã DKD, non haberet quò concurreret cum linea ducta à centro G ad peripheriam H K H: ſicq́; eſſent ambæ ſimul ſumptæ aut æquales ipſi F G, aut eadem minores, contra hypotheſin. Sit itaque altera interſectionum in puncto K. Ad quam duco F K & G K. Dico tria latera Trianguli F G K tribus lineis datis eſſe æqualia.

Quum enim F G linea, quæ poſita eſt æqualis lineæ B, ſit vnum laterum ipſius Trianguli: & latus F G ſit æquale lineæ F D, ex Centri definitione, quæ poſita eſt æqualis lineæ A: erit & ipſum F G latus, per primam Notionem, ipſi A æquale. Demum, quum tertium latus G K, eadem lege Centri, ſit æquale lineæ G H, quæ ipſa, per eandem Notionem, æqualis eſt lineæ c, conſtat Propoſitio.

Hoc Problema in hanc ſententiam poterat proponi.

Dato Triangulo Triangulum æquale & æquilaterum conſtituere.

Vt ſi proponeretur Triangulum A B C, ſtatuerem tres lineas in continuum ad æqualitatem trium laterum ipſius: Et procederet Demonſtratio quam modò dedimus, adjumento octauæ & quartæ. Immò adeò poterat ſtatim proponi à tertia Propoſitione, & ſolius Circuli officio abſolui.

Quod autem de lineis propoſuit Euclides, id nos docuit, vt dignoſceremus vtrum ex tribus datis lineis confici poſſit Triangulum, an non: quod ex ipſis Circulis, ſi ſecuerint ſe inuicem, perſpiciemus.

PROBLEMA 9. PROPOSITIO XXIII.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Propoſitâ rectâ lineâ, ad datum in ea punctum dato angulo rectilineo angulum æqualem conſtituere.

Sit

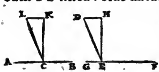
Sit data recta linea A B, datumq́; in ea punctum A : datus verò angulus rectilineus C D E. Volo ad datum punctum A angulum rectilineum dato angulo C D E æqualem conſtituere.



In recta D E ſignetur punctum liberum F : & connexa C F, fiat Triangulum C D F. Iam ex tribus lineis, quę ſint æquales tribus lateribus D F, D C, & C F, conſtituo Triangulum A G H. Quod quidem, ex ipſa conſtructione, manifeſtò æquale eſt Triangulo D C F : aut, ſi auctoritatem requiris, ex octaua. Ob idq́; angulus A angulo D æqualis : Quod erat faciendum.

Hoc etiam ex recto perficiemus. Sit enim linea data A B, datumq́; in ea punctum C : datus verò angulus D E F. Volo ad punctum C ſtatuere angulum angulo D E F æqualem.

Produco F E in G punctum : Ac ſuper punctum E erigo, per vndecimam, ad rectos angulos lineam E H : Quæ ſi congruat cum E D linea : erat datus angulus, rectus : Quapropter, erecta perpendiculari ſuper C punctum, habebimus quæſitum. Sin aliter, excitabo perpendicularem ad pūctum H: cum qua coibit, per quartam Petitionem, linea E D ducta. Eſt enim angulus D E H minor recto : quū G E H ſit rectus. Concurrant igitur in puncto D, vt fiat Triangulum D E H. Eodem modo erigo ſuper punctum C datum, perpendicularem C K, quæ ſit æqualis perpendiculari E H : ſimulq́; ſuper punctum K, alteram perpendicularem K L, quæ ſit æqualis perpendiculari H D : Et connecto C L. Dico itaque angulum L C B æqualem eſſe angulo D E F dato.



Sunt enim duo H E D & K C L Triangula, per quartam, inter ſe æqualia & æquilatera : & duo anguli L C K & D E H æquales. Atqui duo B C K & F E H anguli ſunt æquales, vterque enim rectus. Quare, per ſecundam Notionem, erit totus angulus L C B, toti angulo D E F æqualis : Quod erat conſtitutum.

Quòd ſi perpendicularis extra angulum datum ceciderit, nempe ſi acutus fuerit : eadem erit probandi ratio, niſi quòd pro ſecunda tertiam inducemus Notionem.

THEOREMA 15, PROPOSITIO XXIIII.

Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ,

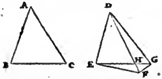
ἑκατ

ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Si duo Triangula duo latera duobus lateribus mutuò æqualia habuerint, angulorum verò ſub illis æquis lateribus contentorum alter fuerit altero major: baſis quoque majorem reſpiciens angulum altera baſi major erit.

Sint duo Triangula A B C & D E F: ſintq; duo latera A B & A C, duobus D E & D F mutuò æqualia: ſcilicet A B æquale D E: & A C æquale D F: ſed ſit angulus A major angulo D. Aio baſin B C majorem eſſe baſi E F.

Ponam enim, ſecundùm doctrinam antecedentis angulum E D G æqualem angulo A: Et, per ſecundam, D G lineam æqualem A C lineæ. Et connectam E G rectam: Quæ aut tranſibit ſupra E F, aut ſuper eandem, aut infra. Et cadat primùm ſupra E F, vt ſecet ipſam D F in puncto H. Et manifeſtum eſt, ex quarta, Triangulum D E G æquale eſſe & æquilaterum Triangulo A B C.



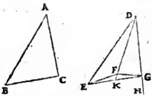
Quoniam itaq; Trianguli D F G duo latera D F & D G ſunt æqualia: vtrumque enim æquale A C: erunt, per quintam, duo anguli D F G & D G F ſuper baſin, æquales. Quapropter major erit angulus D F G angulo F G E: ob idq; multo major angulus totus E F G ipſo F G E. Majus itaque, per decimamnonam, latus E G latere E F. Quare, quum E G ſit æquale B C: major eſt B C baſis, ipſa E F baſi: Quod fuit demonſtrandum.

ITEM aliter. Major eſt angulus H F G, vt jam oſtendimus, ipſo F G H. Majus eſt igitur, per decimamnonam, G H latus ipſo F H latere. Atqui E H & H F, per vigeſimam, ſunt majora E F. Quare multò majora ſunt E H & H G (id eſt E G) ipſo E F. Igitur & A C majus ipſo E F: Quod fuit oſtendendum.

Si verò E G tranſeat ſuper E F: tum E F erit pars ipſius: Vnde E G major erit.

Tranſeat jam E G infra E F: duxq; D F & D G, quæ poſitæ

ſunt



ſunt æquales, protrahantur ad H & K puncta, vt D F ſecet E G in puncto K. Eruntq́; per ſecundam partem quintæ, duo anguli ſub baſi F G H & G F K inter ſe æquales. Major itaque erit angulus G F K angulo E G F: ob idq́; multò major E F G ipſo E G F. Quare majus eſt, per decimamnonam, latus E G (idem & B C) latere E F: Quod erat demonſtrandum.

ALITER. Quum duo anguli F G H & G F K ſint æquales: erit major G F K ipſo F G K. Majus itaque, per decimamnonam, latus K G. latere F K. Sed E K & F K, per vigeſimam, ſunt majora E F. Quare multò majora ſunt E K & K G (id eſt E G) ipſo E F: Quod erat oſtendendum.

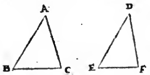
RVRSVS ex vigeſimaprima. Duo latera D G & E G ſunt majora duobus D F & E F. Quare quum D G poſita ſit æqualis D F: ſupererit F G major E F. Sed, vt hîc admonet Campanus, præſtat prior demonſtrandi ratio: vt ex vtraque parte quintæ Propoſitionis ducatur argumentatio. Iucunda tamen illa varietas ingenium acuit, & memoriam exercet.

THEOREMA 16, PROPOSITIO XXV.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Si duo Triangula, duo latera duobus lateribus mutuò æqualia habuerint, baſis verò vnius baſi alterius fuerit major: angulus quoque majori baſi oppoſitus, major erit angulo minori baſi oppoſito.

Sint duo Triangula A B C & D E F: ſintq́; duo latera A B & A C, duobus lateribus D E & D F mutuò æqualia: ſed baſis B C major baſi E F. Dico angulum A majorem angulo D. Hæc eſt Conuerſa antecedentis. Primùm itaq; æquales non erunt: Eſſet enim baſis B C, per quartam, baſi E F æqualis, contra hy-



potheſin. Neque erit angulus A minor angulo D: Eſſet enim, per antecedentem, baſis E F major baſi B C, contra hypotheſin. Supereſt igitur vt A ſit major D: Quod fuit probandum.

Manifeſtum quoque fuit hoc Theorema ex quarta, immò ex ſeipſo. Sed quia ex antecedentibus probationem recipit, cum cæteris in ordinem redactum eſt.

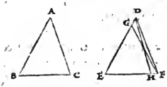
THEOREMA 17, PROPOSITIO XXVI.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Si duo Triangula, duos angulos duobus angulis mutuò æquales habuerint, latusq; vnum vni lateri æquale, ſiue quod æquis adjacet angulis, ſiue quod vni æqualium angulorum ſubtenditur: reliqua quoque latera reliquis lateribus mutuò æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo Triangula A B C & D E F, ſitq; angulus B æqualis angulo E, & angulus C angulo F: Et ſit aut latus B C æquale lateri E F: aut A B æquale D E: aut denique A C æquale D F. Aio reliqua duo latera, reliquis duobus eſſe lateribus æqualia: ac reliquum angulum A reliquo angulo D æqualem.

Primùm igitur ſit latus B C, cui incumbunt duo anguli B & C, æquale lateri E F, cui incumbunt anguli E & F, poſiti æquales ipſis B & C. Dico latus A B æquale eſſe lateri D E: & latus A C, lateri D F: & angulum A, angulo D.



Nam ſi æquale non fuerit A B ipſi D E, ſit D E majus: & reſcindatur G E æquale ipſi A B: & connectatur F G. Eritq;, per quartam, angulus E F G æqualis angulo C: quapropter & angulo E F D, pars toti: quod eſt abſurdum. Erit igitur D E æquale ipſi A B: ob idq;, per eandem, D F æquale A C: & angulus D, angulo A, ſicut voluimus.

Sint

Sint rurſus duo anguli B & C æquales duobus E & F: ſitq; latus A B, quod ſubtenditur angulo C, æquale lateri D E, quod ſubtenditur angulo F, cui poſitus eſt æqualis angulus C. Aio latus B C æquale eſſe lateri E F: & latus A C lateri D F: & angulum A, angulo D.

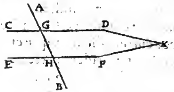
Si enim B C & E F latera non fuerint æqualia, ſit E F majus: & ponatur E H æquale B C: & connectatur D H. Eritq;, per quartam, angulus D H E æqualis angulo A C B: ob idq; & angulo E F D, exterior interiori oppoſito, contra decimamſextam. Eſt igitur E F latus æquale B C lateri. Quapropter & D F, per quartam, æquale A C: & angulus E D F, angulo A. Sicq; patet Propoſitio.

THEOREMA 18, PROPOSITIO XXVII.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Si duas rectas lineas recta linea ſecuerit, duoſq; interiores alternos angulos æquales fecerit: illæ duæ lineæ erunt paralleli.

Sit linea A B, ſecans duas lineas, C D quidem in puncto G, & E F in puncto H: ſintq; duo anguli alterni D G H & E H G, æquales. Dico duas lineas C D & E F eſſe parallelos ſeu æquidiſtantes.



Sin minus, concurrant protractæ ad punctum K, ſi fieri poſſit: vt ſit Triangulum G K H. Cujus angulus K G H interior, erit, ex poſitu, æqualis angulo E H G exteriori oppoſito: quod in Triangulis fieri nequit, per decimamſextam. Non igitur concurrunt C D & E F lineæ. Quare, per Definitionem Parallelorum, ipſæ æquidiſtant altera alteri: Quod erat demonſtrandum.

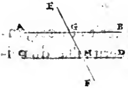
THEOREMA 19, PROPOSITIO XXVIII.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλοις αἱ εὐθεῖαι.

Si duas rectas lineas recta ſecans linea, exteriorem angulum interiori oppoſito & ex eadem parte æqualem fecerit, aut duos interiores ex eadem parte duobus rectis æquales: duæ lineæ erunt paralleli.

Sint duæ lineæ A B & C D, quas ſecet linea E F, illam quidem in puncto G, hanc verò in puncto H: ſitq; angulus G exterior angulo H interiori ex eadem parte æqualis: aut duo anguli H & G interiores ex eadem parte, duobus rectis æquales. Dico duas A B & C D lineas eſſe æquidiſtantes.

Quum enim E G B angulus, ſit, ex poſitu, æqualis D H G angulo: ſitq;, per decimamquintam, A G H eidem E G B æqualis: erunt A G H & D H G alterni, æquales. Quare, per antecedentem, duæ A B & C D lineæ æquidiſtabunt inter ſe: Quod eſt prius.



Sint porrò duo anguli A G H & C H G duobus rectis æquales. Dico ſic quoq; duas A B & C D inter ſe æquidiſtare.

Quum enim duo anguli C H G & D H G, ſint, per decimamtertiam, duobus rectis æquales: ſi vtrimque auferatur C H G angulus, remanebunt, per communem Notionem, duo A G H & D H G alterni, æquales. Quare, per antecedentem, duæ A B & C D inter ſe æquidiſtabunt: Quòd fuit demonſtrandum.

HVIVS Theorematis pars poſterior connexa eſt cum Petitione vltima. Nam ſi duæ lineæ concurrere dicũtur, quæ cum linea ipſas ſecãte duos angulos interiores ex eadem parte duobus rectis minores faciunt: conuerſo modo, Quæ concurrunt, eæ duos angulos interiores ex eadem parte duobus rectis minores efficient. Atqui A B & C D lineæ, duos ejuſmodi angulos duobus rectis minores non efficiunt, immò æquales: Non concurrunt igitur: Quare Paralleli ſunt.

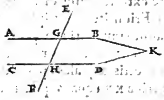
THEOREMA 20, PROPOSITIO XXIX.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Si

Si duas Parallelos recta ſecet linea: erunt duo anguli alterni æquales: & angulus exterior interiori ſibi oppoſito ex eadem parte æqualis: itemq́; duo anguli interiores ex alterutra parte conſtituti, æquales duobus rectis.

Sint duæ A B & C D paralleli, quas ſecet linea E F in punctis G & H. Dico duos angulos B G H & C H G alternos, æquales eſſe: Angulum item G exteriorem angulo H interiori, ipſi ex eadem parte oppoſito, æqualem: Angulos denique G & H ex eadem parte interiores ſimul ſumptos, æquales eſſe duobus rectis. Hæc eſt Conuerſa duarum antecedentium: cujus primum caput ſic probatur:



Si duo anguli B G H & C H G non ſint æquales, ſit major ipſe C H G. Et quoniam C H G & D H G ſunt, per decimamtertiam, duobus rectis æquales: erunt duo B G H & D H G duobus rectis minores. Vnde fiet, vt duæ lineæ A B & C D in alterutram partem productæ concurrant, vt ad punctum K: Quod erit contra hypotheſin, quum ſint paralleli. Sunt igitur anguli B G H & C H G æquales.

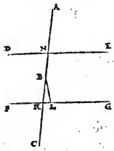
Ad hoc conſequitur ſecundum. Eſt enim, per decimamquintam, angulus A G E æqualis angulo B G H: vnde & ipſi C H G, per communem Notionem, æqualis, exterior interiori.

Hinc rurſus colligitur tertium. Nam quum A G F & A G H, ſint, per decimamtertiam, æquales duobus rectis: erunt quoq; per animi Notionem, C H G & A G H æquales duobus rectis: ambo interiores, & ex eadem parte: Quod erat demonſtrandum.

Si duæ rectæ lineæ, quæ duas parallelos ſecant, inter ipſas ad vnum punctum coïerint, duosq́; angulos alternos æquales fecerint: aut angulum exteriorem interiori ſibi oppoſito ex eadem parte æqualem: aut denique duos interiores ex alterutra parte duobus rectis æquales: eæ duæ lineæ in continuum erunt & linea vna.

Sint duæ lineæ A B & C B, quæ duas parallelos D E & F G ſecent: A B quidem ipſam D E in puncto H: & C B ipſam F G in

puncto K: Sitq; angulus D H B æqualis angulo B K G: aut angulus A H D æqualis angulo B K F: aut denique B H D & B K F æquales ſint duobus rectis. Dico duas A B & C B eſſe in cõtinuum & lineam vnam.



Si enim non ſint ejuſmodi: protrahatur A B, vt ſecet F G in puncto L, & ſit A L linea vna: ſitq; Triangulum B L K. Et erit angulus D H B æqualis angulo G L B alterno, per primã partem hujus vigeſimænonæ: Quapropter G L B æqualis B K G interiori & oppoſito: Quod in Triangulis fieri non poteſt, per decimamſextam. Inſuper erit, per ſecundam partem hujuſce, angulus A H D æqualis angulo B L K, ex eadem parte exterior interiori. Sed idem A H D ipſi B K F ponitur æqualis. Erit igitur B K F ipſi B L K æqualis: Quod per eandem decimamſextam fieri non poteſt.

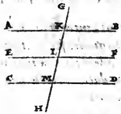
Poſtremò, quum A H D & B K F ponantur duobus rectis æquales: ſintq; A H D & B L K duobus rectis æquales, per vltimam partem hujus vigeſimænonæ: erit B K F æqualis ipſi B L K, repugnante eadem decimaſexta.

THEOREMA 21, PROPOSITIO XXX.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Quæ eidem ſunt æquidiſtantes, eæ quoque inter ſe ſunt æquidiſtantes.

Sint duæ A B & C D æquidiſtantes ipſi E F lineæ. Dico & ambas inter ſe æquidiſtare.

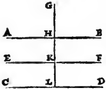


Ponam G H lineam, ſecantem tres lineas A B, E F & C D in punctis K, L, M. Et quoniam A B æquidiſtat E F: erunt anguli alterni B K L & E L K, per primum caput antecedentis, inter ſe æquales. Itidem, quia C D æquidiſtat E F: erit E L K, per ſecundum caput ejuſdem, æqualis C M L, exterior interiori. Angulus igitur B K L angulo C M L, per animi Notionem æqualis. Qui quum ſint alterni, erunt,

per

per vigeſimamſeptimam Propoſitionem, duæ A B & C D æquidiſtantes: Quod erat demonſtrandum.

POTERAT euidentiſſimè demonſtrari ex Recto. Scilicet in A B rectam dimitto, per vndecimam, G H perpendicularem, quæ ipſam A B ſecet in puncto H: quam G H continuabo donec ſecet lineam E F in puncto K: & inde vſque ad C D, vt ſecet ipſam in puncto L.



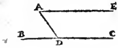
Iam quum G L ſit linea vna, comparatis viciſſim duobus A B & C D cum E F, adductaq; in probationem vigeſimaſeptima, ſeu vigeſimaoctaua: ſatis conſtat, per definitionem perpendiculari, & per decimamquintam Propoſitionem, omnes angulos qui ad H, K, L, eſſe rectos: ac propterea æquales. Quare, per antecedentem, duæ A B & C D paralleli: Quod erat demonſtrandum.

PROBLEMA 10, PROPOSITIO XXXI.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Per punctum extra lineam rectam ſignatum, ipſi lineæ parallelum ducere.

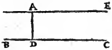
Sit punctum A extra lineam B C ſignatum. Volo per A punctum, ipſi B C lineæ parallelum ducere.



Duco lineam A D, ſecantem B C in puncto fortuito D: quæ cum ipſa faciat angulos A D B & A D C: Et conſtituo in puncto A, per vigeſimamtertiam, angulum D A E æqualem angulo A D B alterno. Ac tum erit A E ipſi B C parallelus, per priorem partem vigeſimæoctauæ: Quod erat faciendũ.

HÆc etiam poterat Perpendicularis officio abſolui.

A puncto enim A duco, per vndecimam, ad rectam B C, perpendicularem A B: Et, per decimam, ad ipſam A D ſuper punctum A erigo perpendicularem A E. Ac tum manifeſtum eſt, per conuerſam rationem Petitionis vltimæ, duas lineas A E & B C non concurrere: quum neutra inclinet in alteram: hoc eſt, quum ex neutra parte duo anguli interiores ſint duobus rectis



min

minores. Neq; majori probatione indiget hæc aſſertio quàm ipſa Petitio.

Hæc ideò annotaui, quòd lineæ Paralleli, jus Recti & Æqualis præcipuo quodam officio conſeruent. Quò fit vt Propoſitiones, quæ Parallelorum mentionem hactenus fecerunt, vſum habeant in Geometricis Demonſtrationibus frequentiſſimum.

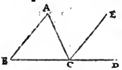
THEOREMA 22, PROPOSITIO XXXII.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί. Καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Angulus exterior Trianguli, duobus interioribus ſibi oppoſitis eſt æqualis: Et cuiuſlibet Trianguli tres anguli duobus rectis ſunt æquales.

Sit Triangulum A B C: Cujus latus B C producatur ad punctum D. Dico angulum A C D exteriorem, duobus A & B interioribus ſimul ſumptis eſſe æqualem: Et tres angulos intimos ipſius Trianguli ſimul ſumptos, duobus rectis eſſe æquales.

A puncto C ducam, per antecedentem, lineam C E parallelum lateri B A. Tum erunt anguli E C A & B A C, per primam partem vigeſimænonæ, æquales, vtpote alterni: & per ſecundam partem ejuſdem, anguli A B C & E C D æquales, exterior interiori. Quare totus A C D exterior, ambobus A & B interioribus eſt æqualis: Quod eſt prius. Atque eadem erit probatio reliquorum angulorum extrà ſumptorum.



Quum itaque duo anguli A C B & A C D ſint, per decimamtertiam, æquales duobus rectis: erunt tres anguli A B C, B A C, & A C B, æquales duobus rectis: Quod fuit demonſtrandum.

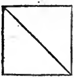
Appendix ex Campano.

Ex hac conſequitur, Cujuſlibet Figuræ Multilateræ omnes angulos ſimul ſumptos bis tot rectis angulis eſſe æquales, quota eſt ipſa Figura in ordine Multilaterarum.

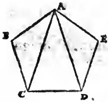
Verbi gratia, Trigonum eſt Figurarum prima, quum nulla ſit

ſit pauciorum laterum: duæ enim lineæ ſuperficiem non concludunt. Trigonum itaque duos complectitur angulos rectos. Vnitas enim, quæ ordinem Trigoni notat, bis ſumpta facit binarium. Tetrapleuron, ſeu Quadrilaterum, quod in ordine eſt ſecundum, quatuor includit angulos rectos: Binarius enim duplicatus quaternarium efficit. Ordo autem Figurarum è lateribus colligitur. Nam ſi duo ſemper latera ſuſtuleris, numerus laterum reſiduus, ordinem Figuræ oſtendet. Vt ſi quæratur; Hexagona quota ſit Figurarum: à ſenario aufer binarium, ac ſupererit quaternarius. Eſt itaque Hexagona ordine inter Figuras quarta. Quare octo angulos rectos continet. In ſumma, vt etiam addamus ad Campanum, quum Triangulum ſit Figura prima: vt ordinem cæterarum cognoſcamus, initium numerationis faciemus à ternario: vt quaternarius ſit pro binario, quinarius pro ternario: ſicq; ordinatim.

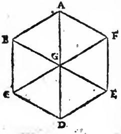
HÆC autem rectorum angulorum conſideratio inde prompta eſt, quòd omnis multilatera Figura in tot Triangula reſoluitur, quota ipſa fuerit à prima. Quadrilatera enim in duo, Pẽtagona in tria, Hexagona in quatuor Triangula reſoluitur: ſicq; cõtinenter: ſicut ex adſcriptis Figuris cernere eſt.



Verbi cauſa, In Pentagono A B C D E, quum quodlibet trium Triangulorum, in quæ reſoluitur, duos rectos angulos includat: ipſum Pentagonum ſex rectos includet angulos. In idem etiam recidet ſi dicamus, In omni Figura multilatera omnes angulos ſimul ſumptos tot rectis æquari angulis, quot ſignificantur per numerum angulorum duplicatum, demptis quatuor.

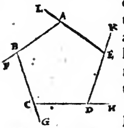


A puncto enim fortuito intra Figuram ſignato, quale hîc in Hexagono A B C D E F, punctum G, ſi ducantur lineæ rectæ ad quemlibet angulorum: erunt in ipſa Figura tot Triangula comprehenſa, quot anguli in ipſa fuerint. Horum itaque Triangulorum omnes anguli ſimul ſumpti tot rectis angulis



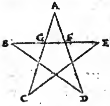
æquantur, per hanc trigeſimamſecundam, quot ſunt anguli totius Figuræ duplicati: vt hîc ſex Triangulorum, ſunt anguli duodecim recti. Quumq; omnes anguli punctum G circumſtantes, ſint, ex decimatertia, quatuor rectis æquales: ſi quatuor ex duodecim auferamus, ſupererunt in Hexagono ſex anguli octo rectis æquales.

HINC etiam manifeſtum eſt, Figuræ Polygonæ angulos exteriores omnes ſimul ſumptos quatuor rectis æquales eſſe. Sunt enim interiores cum exterioribus bis tot rectis æquales, quot in Figura anguli fuerint, per decimãtertiam. Interiores autem bis tot rectis ſunt æquales, quot ipſa Figura habuerit angulos, demptis quatuor, vt modò oſtendimus: quapropter exteriores ſemper quatuor rectis æquales.



Exempli gratia, protrahantur quinque latera Pentagoni A B C D E, ad puncta F, G, H, K, L. Eruntq;, per decimamtertiam, duo anguli qui ad A, æquales duobus rectis: ac, per eandem, duo anguli, qui ad B, æquales duobus rectis. Sicq; binos quoſque angulos ſumendo, ij omnino decem rectis æquabuntur. Demptis itaque interioribus, qui ſex rectis æquantur, vt modò probauimus: erunt exteriores quatuor rectis æquales.

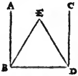
CONSTAT etiam, in omni Pentagono ſic conſtructo, vt quodlibet latus duo ſecet ex reliquis, quinque angulos duobus rectis eſſe æquales. Sit enim quale proponitur Pentagonum A B C D E, vt ſcilicet A C latus ſecet latus B E in puncto G: & latus A D ſecet idem B E in puncto F. Eritq;, per præſentem, angulus A F G æqualis duobus angulis B & D, Trianguli B D F: exterior interioribus oppoſitis. Eadem ratione angulus F G A, duobus angulis C & E, Trianguli C E G, erit æqualis. Atqui duo anguli A F G & F G A cum angulo A, per hanc ipſam, ſunt æquales duobus rectis. Sunt igitur quatuor anguli B, C, D, E, cum angulo A, æquales duobus rectis: Quod erat demonſtrandum.



Hæ Campani commentationes, quamuis non indignæ cognitu

gnitu videantur: tamen ejus generis inuenta ſi conquirantur, in immenſum excreſcere poſſent. Figuræ enim Geometricæ tam latum ſpariandi campum ingeniis quàm Numeri, immò adeò latiorem, exhibent.

Ex hoc etiam Theoremate intueri licet, Trianguli conſtructionem ex duabus lineis ſuper tertiam ad rectos angulos erectis, perfici. Si enim altera in alteram inclinetur, ambæ cum tertia ſic includent ſuperficiem triangulam, vt quod duobus rectis angulis deperit, id in tertio angulo recuperetur. Vt ſi intelligantur duæ lineæ A B & C D ad rectos angulos ſuper lineam B D erectę, moueri altera alteram versùs, & coïre ad punctum E, vt fiat Triangulum B D E: quod duobus rectis angulis A B D & C D B decreſcit, id tertius angulus E ſibi aſſumit, vt Superficies exurgat. Sic res humanæ comparatæ, vt aliæ in alias cadentes, tot ſpécierum varietates componant. Sed nos ad inſtitutum reuertamur, aliâs de iis luſuri.



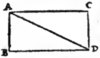
THEOREMA 23, PROPOSITIO XXXIII.

Αἱ τὰς ἴσας καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι.

Si duæ rectæ lineæ duas æquales & æquidiſtantes lineas ex aduerſo connectant: erunt & ipſæ inter ſe æquales & æquidiſtantes.

Sint duæ lineæ A B & C D, quæ duas A C & B D æquales & æquidiſtantes connectant ex aduerſo in quatuor punctis A, B, C, D. Dico duas A B & C D eſſe æquales inter ſe & æquidiſtantes.

Connectam enim A D. Et quia A C & B D ſunt æquales & æquidiſtantes: erit angulus C A D, per primam partem vigeſimænonæ, angulo A D B æqualis. Itaque, quum duo latera A C & A D, Trianguli A C D, ſint æqualia duobus lateribus B D & D A, Trianguli B A D: erit, per quartam, baſis A B æqualis baſi C D: Quod eſt prius.



Erunt &, per eandem, duo anguli A D C & B A D inter ſe æquales. Quare, quum ſint alterni, æquidiſtabit, per vigeſimam-

ſeptimam, A B ipſi C D: Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 24. PROPOSITIO XXXIIII.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί: καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

In omni Parallelogrammo, latera ex aduerſo poſita, ſunt æqualia, & anguli oppoſiti æquales: Et Dimetiens medium Parallelogrammum diuidit.

Sit Parallelogrammum A B C D, cujus Dimetiens A D. Dico duo latera A B & C D inter ſe eſſe æqualia: duoq; A C & C B inter ſe: Duos item angulos A & B inter ſe æquales, duoſq; B & C inter ſe. Totam denique Superficiem à Dimetiente A D, mediam diuidi.

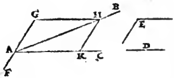


Quum enim A B & C D ſint æquidiſtantes: duo alterni anguli B A D & C D A erunt, per vigeſimamnonam, æquales. Quumq; A C & B D itidem ſint æquidiſtantes: erunt & duo alterni C A D & B D A æquales, per eandem. Quum itaque duo Triangula A B D & A C D, habeant duos angulos duobus angulis mutuò æquales, ſcilicet B A D & B D A, ipſis C D A & C A D: & latus A D, cui incumbunt anguli, vtrique Triangulo commune: erit, per vigeſimamſextam, latus A B lateri C D æquale: latuſq; A C lateri B D: & angulus B angulo C æqualis: ob idq; totum Triangulum A B D, toti Triangulo A C D æquale. Quare Theorema omni ex parte conſtat.

Inter duas lineas interminatas ad angulum datum conjunctas, lineam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum alteri angulo dato æqualem. Oportet autem duos angulos datos duobus rectis eſſe minores.

Sint duæ lineæ A B & A C, conſtituentes angulum datũ B A C, ſed quæ ſint interminatæ ex parte extenſionis earum: ſitq; linea data, D: anguluſq; alter datus, E. Volo inter duas A B & A C collocare lineam æqualem lineæ D, quæ cum altera illarum faciat angulum æqualem angulo E dato. Modò tamen duo anguli A & E ſint minores duobus rectis. Alioqui fieri non poſſet

Triang



Triangulum, per decimamſeptimam.

Placet ergo vt angulus conſtituendus ſit ſuper lineam A C. Super puncto A facio angulum C A F æqualem angulo E dato, per vigeſimamtertiam Propoſitionem: & ex altera parte produco F A ad punctum G, ſic vt A G ſit æqualis lineæ D datæ, per ſecundam: Et per punctum G duco, per trigeſimamprimam, G H parallelum ipſi A C: quam produco eouſque vt concurrat, ſiue ſecet A B in puncto H: itidemq́; per punctum H, duco H K parallelum ipſi G F, quæ ſecet lineam A C in puncto K. Dico jam lineam H K conſtitutam inter duas A B & A C, eſſe æqualem lineæ D, & angulum K eſſe æqualem angulo E dato.

Quoniam enim, ex conſtructione, A G H K eſt Parallelogrammum: erit K H æqualis A G, per trigeſimamquartam Propoſitionem: quapropter & ipſi D lineæ æqualis: Quod eſt prius.

Et quoniam A K in duas parallelos F G & K H incidit: erit angulus A K H æqualis angulo F A K, per primam partem vigeſimænonæ: quum ſint alterni: quapropter & idem K angulus, ipſi E angulo dato æqualis. Linea igitur H K inter duas A B & A C collocata, & lineæ D æqualis, facit angulum K æqualem angulo E dato: Quod erat conſtitutum.

Hoc Problema hîc apponere viſum eſt, aliquando mihi propoſitũ ab artifice quodam Geometriæ non imperito: quod difficilem probationem videretur habere: Tria enim dantur, vt Triangulum conſtituatur: duo anguli, & linea vna: præſertim quum vterque angulus datus, non ſit ſuper eadem linea conſtitutus: ſic enim facilis eſſet constructio. Vt ſi ſuper linea A K conſtituendum Triangulum proponeretur, habens duos angulos duobus angulis datis æquales. Hîc verò A K linea, arte conquiritur.

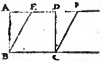
THEOREMA 25, PROPOSITIO XXXV.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Quæ ſuper eandem baſin Parallelogramma & inter eaſdem parallelos conſiſtunt, inter ſe ſunt æqualia.

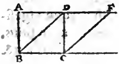
Sint duo Parallelogramma A B C D & E B C F, ſuper eandem baſin B C, & inter eaſdem parallelos A F & B C. Dico eſſe inuicem æqualia.

Aut enim linea B E ſecabit lineam A F citra punctum D, aut in ipſo puncto D, aut vltrà. Secet igitur primùm citra D punctum.



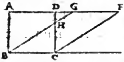
Et quia vtraque duarum linearum A D & E F, eſt æqualis lineæ B C: erunt & ambæ inter ſe æquales. Dempta igitur E D communi, remanebit A E æqualis D F. Rurſus quia, per eandem, A B eſt æqualis C D: & angulus E A B, per ſecundam partem vigeſimænonæ, æqualis angulo C D F, interior exteriori: erunt, per quartam, duo Triangula E B A & F C D inter ſe æqualia. Quare, addita vtrique Figuræ anormi C D E B, erunt duo Parallelogramma A B C D & E B C F, æqualia.

Nunc autem ſecet linea B E lineam A F in ipſo puncto D: eruntq; iiſdem rationibus, duo Triãgula A B D & D C F æqualia. Quare, addito vtrique B C D Triangulo, fient duo Parallelogramma A B C D & D B C F æqualia.



Sed & per trigeſimamquartam probabitur ſic. Duo Triangula A B D & B C D ſunt æqualia, ratione Dimetientis, per trigeſimamquartam: itemq; duo Triangula C D F & B D C æqualia, ob eandem rationem. Duo igitur Triangula A B D & C D F, ſunt, per communem Notionem, æqualia. Quare, vtrique addito Triangulo B C D, fient duo Parallelogramma A B C D & D B C F æqualia.

Secet demùm linea B E lineam A F præter D punctum in G: vt interſecet lineam C D in puncto H. Quia igitur duæ lineæ A D & G F ſunt æquales, per antecedentem & communem Notionem: addita vtrique particula D G, erunt



duæ A G & D F æquales: & Triangulum A B G Triangulo D C F æquale: quia vtriuſque latera ſunt mutuò æqualia, & anguli mutuò æquales, per antecedentem, & per vigeſimamnonam. Vtriq; ergo addito B C H Triangulo, & ablato D G H ab iiſdem: erunt duo A B C D & G B C F Parallelogramma æqualia: Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 26, PROPOSITIO XXXVI.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς

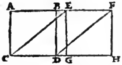
παρα

παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Quæ ſuper æquales baſes Parallelogramma, & inter eaſdem parallelos conſiſtunt, inter ſe ſunt æqualia.

Sint duo Parallelogramma A B C D & E F G H, ſuper æquales baſes C D & G H, & inter duas Parallelos A F & C H. Dico hæc duo Parallelogramma eſſe æqualia.

Ducam duas lineas C E & D F. Eritq;, per trigeſimamtertiam, ſuperficies C D E F æquidiſtantium laterum: Duæ enim æquidiſtantes C D & E F inter ſe ſunt æquales: quum vtraque ſit æqualis G H, & connectantur duabus C E & D F ex oppoſitis partibus. Quia ergò, per antecedentem, vtrumque duorum Parallelogrammorum A B C D & E F G H, eſt æquale Parallelogrammo C D E F (hinc E F baſi, illinc C D intellectâ): ipſa erunt, per animi Notionem, æqualia: Quod erat demonſtrandum.



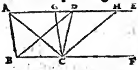
THEOREMA 27, PROPOSITIO XXXVII.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Triangula ſuper eandem baſin & inter eaſdem parallelos, ſunt æqualia.

Sint duo Triangula A B C & D B C, ſuper eandem baſin B C, & inter duas Parallelos A E & B F conſtituta. Hæc dico eſſe æqualia.

Duco, per trigeſimamprimam, C G æquidiſtantem A B: & C H æquidiſtantem B D. Eruntq; duo Parallelogramma A B C G & D B C H æqualia: ob id, & eorum dimidia. Quare, quum A B C Triangulum ſit dimidium Parallelogrammi A B C G, per trigeſimamquartam: & D B C Triangulum ſit dimidium Parallelogrammi D B C H, per eandem: ipſa Triangula inter ſe erunt æqualia: Quod fuit demonſtrandum.



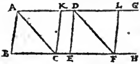
THEOREMA 28, PROPOSITIO XXXVIII.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλ

ἀλλήλοις εἰσί.

Triangula ſuper æquales baſes & inter eaſdem parallelos conſtituta, ſunt æqualia.

Sint duo Triangula A B C & D E F, ſuper baſes, B C & E F æquales & inter duas parallelos A G & B H. Hæc dico eſſe æqualia.



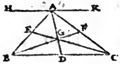
Ducam C K æquidiſtantem A B: & F L æquidiſtantem E D. Eruntq́; , per trigeſimamſextam, duo Parallelogramma A B C K & D E F L æqualia: ob idq́; A B G & D E F Triangula, eorum dimidia, per trigeſimamquartam, æqualia: Quod erat oſtendendum.

Ex hac facillimè elicitur hoc Problema.

Datum Triangulum in duo Triangula æqualia partiri.

Sit enim Triangulum A B C, diuidendum in duo æqualia.

Diuido vnum laterum, & ſit ipſum B C, in duo æqualia, per decimam, in puncto D: & connecto D A. Dico duo Triangula A B D & A C D eſſe æqualia. Quod ſatis manifeſtum eſt ex hac



trigeſimaoctaua: ſi intellexerimus parallelum ipſi B C ductam per punctum A, vt docet trigeſimaprima: qualis hoc loco, ad euidentiam, poſita eſt H K. Duo etiam latera A B & A C æqualiter diuiſimus in punctis E & F: vt intelligas cujuſcúnque laterum ſectio fiat, totum Triangulum per æqualia diuidi. Vbi Triangulorum quoque minorum æqualitas agnoſcitur, ex tribus lineis A D, B F, & C E ſe ſcindentibus in puncto G. Hoc facit ad diuidenda triangula in pariter paria: vt in 4, 8, 16, 32.

Mechanicè verò diuidetur triangulum in alias partes, diuiſo ſimiliter latere, ductiſq́; lineis ab angulo oppoſito ad puncta ſectionum. Cujus diuiſionis oſtenſio ad Sextum librum reſeruatur.

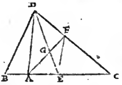
Subijciemus & hoc Problema,

A puncto in vno laterum Trianguli ſignato lineam ducere, quæ Triangulum bifariam diuidat.

Sit punctum A ſignatum in latere B C trianguli B C D. Volo à puncto

punćto A ducere lineam quæ diuidat triangulum B C D in duas partes æquales.

Diuido latus B C bipartitò in punćto E. Tum à punćto A duco ad angulum D oppoſitum, lineam A D. Cui, per punćtum E, duco E F parallelum, per trigeſimam, quæ ſecet latus D C in punćto F. Et connećto A F. Dico A F eſſe quæ diuidit triangulum B C D in duo æqualia. Scilicet A B D F Quadrilaterum, æquale eſſe A C F triangulo.



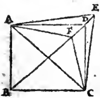
Connećto E D, ſecantem A F in punćto G. Et conſtat, ex trigeſimaoćtaua, duo triangula B E D & G E D eſſe æqualia, intellećtâ parallelo ipſi B C, dućtâ per punćtum D: quum ſint ſuper æquales baſes E B & E C. Duo quoque triangula D E F & A E F ſunt æqualia, per trigeſimamſeptimam: quum ſint ſuper eandem baſin E F, & inter duas parallelos A D & E F. Dempto itaque communi E F G, erit triangulum A E G æquale triangulo D F G: Vtrique igitur ipſorum addito Trapezio C F G E, erit A C F triangulum æquale D E C triangulo. Atqui D E C eſt dimidia pars totius trianguli B C D: quapropter & A C F eſt dimidia pars ejuſdem. Reliqua itaque pars dimidia, erit A B F D Trapezium. Quare linea A F diuidit totum A C D triangulum æqualiter: Quod facere oportuit.

THEOREMA 29, PROPOSITIO XXXIX.

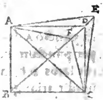
Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστί.

Triangula æqualia ſuper eandem baſin & ad eandem partem erećta, inter duas conſiſtunt parallelos.

Triangula, ſuper eandem baſin ad eandem partem erećta, dicuntur, quum linea dućta à vertice vnius ad verticem alterius, latera eorum non ſecat.



Sint duo triangula A B C & D B C ſuper baſin B C, quæ verticem ad eandem partem habeant. Et connećtatur A D. Dico A D lineam eſſe parallelum baſi B C.



Sin aliter: ducatur parallelus ipſi B C, per trigeſimamprimam: quæ aut tranſibit ſupra A D, aut infra eandem. Si ſuprà, ſit ipſa A E: & producatur B D, quouſque concurrat cum A E in puncto E: connectaturq; E C. Quoniam itaque, per trigeſimamſeptimam, triangulum A B C eſt æquale triangulo E B C, vtrumque enim inter duas parallelos: & eidem triangulo A B C poſitum eſt æquale triangulum D B C: erit & idem D B C æquale ipſi E B C, pars toti: Quod eſſe non poteſt.

Si verò parallelus duci poſſit infra A D, vt A F: connexâ F C, fiet triangulum F B C æquale ipſi D B C, pars toti. Non igitur erit alia parallelus baſi B C, quàm ipſa A D: Quod erat oſtendendum.

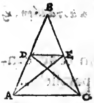
Appendix ex Campano.

Ex hac & antecedente conſequitur,

Si linea recta duo Trianguli latera per æqualia ſecuerit: ipſa erit tertio lateri æquidiſtans.

Sit enim triangulum A B C: & ſit linea D E quæ diuidat duo latera A B & A C per duo æqualia in punctis D & E. Hanc dico eſſe parallelum ipſi A C.

In Quadrilatero A C E D ducantur duæ tranſuerſæ A E & C D. Intellectaq;, per punctum E, parallelo ipſi A B: erit, per trigeſimamoctauam, triangulum B D E æquale triangulo D A E: quum duæ ipſorum baſes A D & D B, poſitæ ſint æquales. Rurſus intellectâ, per punctum D, parallelo ipſi B C: erit idem triangulum B D E æquale triangulo C E D. Erunt itaque, per animi Notionem, duo triangula E A D & E C D æqualia. Quæ quum ſuper eandem ſint baſin D E, & in eandem partem erecta: erunt, per hanc trigeſimamnonam, inter duas parallelos D E & A C: Quod fuit demonſtrandum.



THEOREMA 30, PROPOSITIO XL.

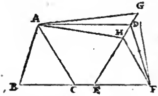
Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστί.

Triang

Triangula æqualia ſuper æquales baſes, & in eandem partem erecta, inter duas conſiſtunt parallelos.

Sint duo Triangula A B C & D E F æqualia, ſuper duas baſes B C & E F æquales, & in eandem partem erecta: & connectatur A D. Dico duo triangula A B C & D E F inter duas parallelos B F & A D conſiſtere. Hæc eſt Conuerſa trigeſimæoctauæ.

Nam ſi A D non eſt ipſi B F parallelus: alia parallelus ducta tranſibit ſupra aut infra A D. Si ſuprà, ſit ipſa A G: & producatur E D ad concurſum A G, in punctum G: connectaturq́; G F. Eritq́;, per trigeſimamoctauam, triangulum G E F æquale triangulo A B C. At D E F poſitum eſt ipſi A B C æquale. Erit igitur & D E F ipſi G E F æquale, pars toti: quod eſt abſurdum.



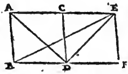
Si verò infra A D tranſeat, ſit ipſa A H: & connectatur H F. Ac tum eadem argumentatione probabitur triangulum H E F, triangulo D E F eſſe æquale, pars toti. Quare, quum neutra ratione fieri poſſit, erunt B F & A D paralleli: Quod erat oſtendendum.

THEOREMA 31, PROPOSITIO XLI.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Si Parallelogrammum Triangulumq́; ſuper eandem baſin, & inter duas parallelos conſiſtant: Parallelogrammum Triangulo duplum erit.

Sit Parallelogrammum A B C D, & triangulum B D E, ſuper eandem baſin B D, & inter A E & B D parallelos. Dico Parallelogrammum A B C D eſſe duplum trianguli B D E.



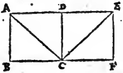
In Parallelogrammo ducam dimetientem A D: Eritq́;, per trigeſimam ſeptimam, Triangulum A B D æquale Triangulo E B D. Sed Parallelogrammum A B C D, per trigeſimamquartam, duplum eſt Tri-

anguli A B D: Quare & duplum Trianguli E B D: Quod erat oſtendendum.

Ex hoc ſatis conſtat, Si duplicetur baſis, Triangulum ſuper hanc erectum, æquale eſſe ipſi Parallelogrammo: Quale hoc loco eſt B E F Triangulum.

Probabitur & hoc facilè quod ſubiecimus Theorema,

Si Parallelogrammum Triangulumq́; ſuper æquales baſes & inter duas parallelos conſiſtant: Parallelogrammum Triangulo duplum erit.



Sit enim Parallelogrammum A B C D, & Triangulum E C F, ſuper æquales baſes B C & C F. Dico A B C D Parallelogrammum eſſe duplum Triangulo E C F.

Connectatur E D: & ducatur per punctum C, parallelus ipſi E F, ſi C D parallelus non fuerit. Ac tum, ex trigeſimaſexta, & trigeſimaquarta, conſtabit Propoſitio.

Hanc verò Euclides rectè prætermiſit ob facilitatem. Sed & nonnullas ſimilis notionis, quas antea expreſſit, poterat omittere.

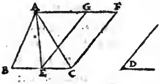
PROBLEMA II, PROPOSITIO XLII.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Dato Triangulo æquale Parallelogrammum conſtituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit datum Triangulum A B C, datus verò angulus D. Volo ipſi Triangulo A B C æquale Parallelogrammum conſtituere, habens angulum æqualem angulo D.

Diuido baſin B C in duo æqualia, per decimam Propoſitionem, in puncto E: & connecto A E. Tum, per punctum A, duco A F parallelum ipſi B C, per trigeſimamprimam: & ſuper



punctum E conſtituo, per vigeſimamtertiam, angulum G E C æqualem angulo D dato. Demũ ipſi E G, per punctum C, duco C F parallelum. Dico Parallelogrãmum E C F G eſſe

eſſe æquale A B C Triangulo.

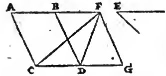
Quoniam enim, per trigeſimamoctauam, triangulum A B E eſt æquale Triangulo A E C: erit totum Triangulum A B C duplum Trianguli A E C. At Parallelogrammum E C F G, per antecedentem, duplum eſt ejuſdem Trianguli A E C. Quare & ipſum E C F G Parallelogrammum, æquale eſt Triangulo A B C, habens angulum G E C æqualem angulo D: Quod erat faciendum.

Conuerſa quoque hujus erit ejuſmodi,

Dato Parallelogrammo æquale Triangulum conſtituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit datum Parallelogrammum A B C D, datus verò angulus E. Volo ipſi A B C D Parallelogrammo conſtituere Triangulum æquale, habens angulum angulo E æqualem.

Super punctum C per vigeſimamtertiam, conſtituo angulum D C F, æqualem angulo E: Et C F ſecet A B protractam, in



puncto F. Itidem protraho C D, quæ eſt ipſi A F parallelus, ad punctum G: ita vt D G ſit æqualis ipſi C D. Ac demùm connecto F G. Dico Triangulum C F G eſſe æquale A B C D Parallelogrammo.

Quum enim, per trigeſimamoctauam, totum C F G Triangulum ſit duplum C D F Trianguli: &, per quadrageſimamprimam, Parallelogrammum A B C D ſit ejuſdem C D F Trianguli duplum: erunt A B C D Parallelogrammum & C F G Triangulum inter ſe æqualia: Quod erat faciendum.

THEOREMA 32, PROPOSITIO XLIII.

Παντὸς παραλληλογράμμου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

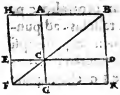
Duorum Parallelogrammorum circa Dimetientem majoris Parallelogrammi conſiſtentium, Supplementa ſunt æqualia.

Circa Dimetientem conſiſtunt Parallelogramma, quæ in

Dimetiente majoris Parallelogrammi ſuam habent Dimetientem. Supplementa verò dicuntur, quæ cum duobus Parallelogrammis majus Parallelogrammum perficiunt.

Sint itaque duo parallelogramma A B C D & E C F G: quorum cuſpides quæ ad C, ſint in eodem puncto C ſic conjunctæ ad decuſſationem, vt vtrumque Parallelogrammum per medium diuidatur, Dimetiente B F: ſintq; ipſis annexa duo ſupplementa H A E C & C D G K, perficientia totum Parallelogrammum B H F K. Dico H A B C & C D G K Supplementa eſſe æqualia.

Quum enim Dimetiens B F bipartitò diuidat totum Parallelogrammum B H F K per trigeſimamquartam: erunt duo triangula B F H & B F K æqualia: Quumq; eadem B F bipartitò diuidat A B C D Parallelogrammum, erunt & duo triangula B C A & B C D æqualia. Atque eadem ratione duo triangula C F E & C F G æqualia: Quare, ablatis duobus triangulis B C A & C F E à toto triangulo B F H: itemq; ablatis duobus triangulis B C D & C F G à toto B F K: remanebunt duæ Superficies H A E C & C D G K inter ſe æquales: Quod erat oſtendendum.



IN HAC Propoſitione demonſtranda, ſtructuram ab aliis aliquantùm variaui: non nouitatis ſtudio, ſed vt totum negotium Supplementorum & integri Parallelogrammi euidètiùs exponerem. Vix enim vſquam in toto opere Geometrico occurrit Figuratio magis fœcunda quàm hæc Gnomica: hoc eſt, quæ vno Parallelogrammo & Gnoma conflatur. Vt hoc loco, ſi A B C D Parallelogrammum ſumamus, Figura illa H F C D, quæ cum A B C D perficit totum B H F K Parallelogrammum, Gnoma ſeu Gnomon vocatur. Si verò ſumatur E F C G Parallelogrammum: erit Gnomon H B C G Figura. Nam hîc Gnomonis explicandi locus eſt maximè opportunus: licet Euclides ad ſecundum librum diſtulerit.

Hanc ego Figuram myſticam ſoleo vocare: Ex ea enim, velut ex locupletiſſimo promptuario, innumerabiles exeunt Demonſtrationes. Quod cum magna voluptate perſpiciet quî in re Geometrica ſeriò ſe exercebit.

Cui verò magis placebit aliorum conſtructio, is primùm ſibi delineet B H F K Parallelogrammum: tum ducat E D parallelum

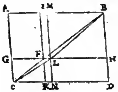
lelum : inde A C alteram parallelum : atque eam demonſtrationem ſequatur quam modò tradidimus.

Hujus Conuerſam ſic inſtituemus,

Si Parallelogrammum in duo Supplementa æqualia & duo quantacunq; Complementa diuiſum fuerit: duorum Complementorum Dimetientes in continuum erunt, & vna totius Parallelogrammi Dimetiens.

Complementa hîc vocauimus, duo Parallelogramma quæ cum duobus Supplementis totum Parallelogrammum conſtituunt. Sic enim ob vocum affinitatem non ineptè dici poſſunt: tum ne ſine nomine eſſent, tum vt faciliùs caperentur, à Supplementis nominatim diſtincta.

Sit itaque Parallelogrammum A B C D: Cuius duo Supplementa æqualia, A E F G & F H D K : duo verò Complementa G F C K & E B F H, quorum Dimetientes C F & F B. Dico C F B eſſe lineam vnam, & totius A B C D Parallelogrammi Dimetientem.



Si enim non ſit ejuſmodi, erit alia totius Parallelogrammi Dimetiens : Sitq; ipſa C L B, infra Dimetientes C F & F B educta, ſecans G H in puncto L : Et per ipſum L punctum, ducatur M L N, per trigeſimamprimam Propoſitionem, ipſi A C Parallelus : Sintq; in toto Parallelogrammo A B C D, duo Supplementa A M G L & L H N D. Atque hæc, per Directam hujus, erunt inter ſe æqualia : quum ſint circa Dimetientem C L B : Sed A E F G Supplementum poſitum eſt æquale Supplemento F H D K. Quum itaque F H D K majus ſit ipſo L H D N : erit A E F G majus ipſo A M G L, pars toto, quod eſt abſurdum. Iiſdem rationibus probabitur Dimetiens educi non poſſe ſupra Dimetientes C F & F B Quare C F B vna eſt Dimetiens totius Parallelogrammi : Quod erat probandum.

PROBLEMA 12, PROPOSITIO XLIIII.

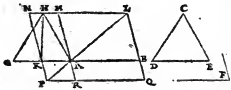
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Sup

Super data recta linea, dato Triangulo æquale Parallelogrammum conſtituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit data linea A B, datumq; Triangulum C D E, datus verò angulus F. Volo ſuper A B conſtituere Parallelogrammum æquale triangulo C D E, habens angulum æqualem angulo F. Differt hæc à quadrageſimaſecunda: quòd hìc data ſit linea, illic nulla.

Produco itaq; B A ad punctum G: & pono A G æqualem lateri D E, Trianguli dati: Et, per vigeſimamtertiam, ad punctum A facio angulum G A H æqualem angulo E: Et, per ſecundam, facio A H æqualem lateri E C. Connexaq; G H, erit Triangulum A G H, per quartam Propoſitionem, æquale Triangulo C D E dato. Diuido poſtmodùm A G per æqualia in puncto K, per decimam: & connecto H K. Et per punctum H, duco H L Parallelum ipſi G B, per trigeſimamprimam. Inde ad punctum A conſtituo angulum G A M æqualem angulo F dato, per vigeſimamtertiam, vt A M ſecet H L in puncto M. Tum per punctum K, duco K N Parallelum & æqualem ipſi A M. Et connexâ H N, facio Parallelogrammum A K M N. Quod, per trigeſimamoctauam & quadrageſimamprimam, erit æquale Triangulo A G H, ob idq; Triangulo C D E dato. Cæterùm duco B L Parallelum ipſi A M: quã conjungo cum N M protractâ, in puncto L. A quo educo Dimetientem L A: quam produco donec jungatur cum N K protracta, in puncto P. Et duco P Q Parallelum & æqualem ipſi K B. Ac demum, connexis A R & B Q, perficio totum Parallelogrammum N L P Q, conſtans quatuor Parallelogrammis. Inter quæ Supplementum A Q, per antecedentem, æquale eſt Supplemento A N: ob id & Triangulo dato C D E. Quare, quum linea data A B ſit vnum laterum ipſius A Q Parallelogrammi: & angulus B A R ſit, per decimamquintam, angulo G A L æqualis: ob idq; angulo F dato: conſtat totum Problema.



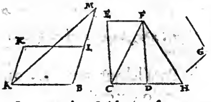
Hanc

Hanc Campani deſcriptionem appoſuimus, vt ipſius tædioſam diligentiam,ac minimè neceſſariam oſtenderemus. Nihil enim opus fuit Triangulo A G H. Tantùm fuit conſtituendum Parallelogrammum A K M N Triangulo C D E æquale, habens angulum æqualem angulo F, ex quadrageſimaſecunda: ſicut rectè hic Theon aſtruxit. Propoſitiones enim Geometricæ aliæ aliis præeunt: non vt ipſarum conſtructio, ſed vſus tantùm repetatur: ne linearum multitudo intellectum conturbet potiùs quàm iuuet.

Hujus autem Conuerſa ſic erit,

Super data recta linea, dato Parallelogrammo Triangulum æquale conſtituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit data linea A B: datumq́, Parallelogrammum C D E F: datus verò angulus G. Volo ſuper A B conſtituere Triangulum, ipſi C D E F Parallelogrammo æquale, habens angulum æqualem angulo G. Duco G H Dimetientem: & protractâ C D ad H



punctum, pono D H æqualem C D: Et connecto H F. Eritq́ Triangulum C H F, per quadrageſimamprimã, æquale Parallelogrammo C D E F: quũ baſis ſit dupla. Iam, per directã hujus, ſuper A B conſtituo Parallelogrammũ A B K L, æquale Triangulo C H F, habens angulum A B L æqualem angulo G dato. Tum, protractâ B L, pono L M æqualem B L: Ac demùm connecto A M. Dico jam Triangulum A B M, ſuper A B eſſe conſtitutum quale voluimus.

Eſt enim Triangulum A B M æquale Parallelogrãmo A B K L, per quadrageſimamprimam: quum ſint inter duas Parallelos B M & A K, ſitq; dupla baſis Trianguli. Sed A B L K, ex conſtructione, eſt æquale Triangulo C H F: & C H F æquale C D E F, per ipſam quadrageſimamprimam. Quare, per animi Notionem, Triangulum A B M æquale eſt Parallelogrammo C D E F, habens angulum A B M, æqualem angulo G dato: Quod erat faciendum.

Poterat quoque in hæc verba proponi Problema,

Inter duas Parallelos interminatas, dato Rectilineo æquale Pa-

Digitized by Google

rallelogrammũ conſtituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Vbi animaduertendum, inter duas parallelos datas Parallelogrammum conſtituere, non eſſe difficilius, quàm ſuper data recta linea. Nam vbicumque datur linea recta, dantur duæ paralleli interminatæ: intelligo, ad Parallelogrammum conſtituendum.

Hoc volui adjicere, vt Geometriæ candidati, Propoſitiones variè inuentas & enunciatas conciliare, & ad vſum accommodare diſcant.

HANC noſtram poteramus in locum ſequentis ſubſtituere, quum eſſet locupletior. Datur enim linea: præter id quòd ſequens ipſa vacare videtur, vt quæ ex antecedente ſatis paterêt: niſi fortè quòd Rectilinea in Triangula reſoluere monet. Ob id, à nonnullis omiſſa eſt, vt à Campano. Eam tamen è loco non mouimus. Nihil enim in præſens de noſtro in ordinem redigere conſtituimus.

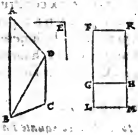
PROBLEMA 13. PROPOSITIO XLV.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Dato Rectilineo æquale Parallelogrammum conſtituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit datum Rectilineum A B C D, datus verò angulus E. Volo ipſi A B C D Rectilineo æquale Parallelogrammum conſtruere, habens angulum æqualem angulo E.

Reſoluo A B C D, quum ſit Quadrilaterum, in duo Triangula A B D & B C D: Ipſiq; A B D, per quadrageſimamſecundam, conſtituo æquale Parallelogrammum F G H K, habens angulum F K H, angulo E æqualem. Et continuata K H in punctum M, vt fit angulus G H M, per vigeſimamnonam æqualis angulo K: conſtituo ſuper G H, per antecedentẽ, Parallelogrãmum G H L M, æquale Triangulo B C D, habens angulum G H M jam creatum. Et quoniam linea K M, ex poſitu, eſt linea vna: & angulus



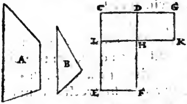
gulus M H G æqualis angulo F G H alterno, per primam partem vigeſimænonæ: ſed ipſe M H G cum L G H duobus rectis æqualis, per vltimam partem eiuſdem: erit F G H angulus cum ipſo L G H, duobus rectis æqualis. Itaque, per decimamquartam, F L eſt linea vna. Quumq; F G & K H ſint, per trigeſimamtertiam, æquales: itemq; G L & H M, per eandem, æquales: erit tota F L, toti K M æqualis: &, per trigeſimamtertiam, F K & L M æquales. Eſt igitur totum Quadrilaterum F K L M, Parallelogrammum. Quare quum angulus K ſit æqualis angulo E: conſtat Propoſitio.

Ex jam demonſtratis emerget hoc Problema,

Propoſitis duabus Superficiebus rectilineis inæqualibus, exceſſum maioris ſupra minorem cognoſcere.

Sint duæ Superficies rectilineæ A & B, quarum maior ſit A. Volo ſcire quantus ſi exceſſus ipſius A ſupra B.

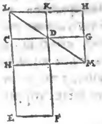
Conſtituo, per quadrageſimamquartam, Parallelogrammum C D E F, æquale ipſi A Rectilineo, habens angulum C D E F, verbi gratia, rectum. Et protracta C D in G punctum, factaq; D G æquali ipſi C D: conſtituo, per quadrageſimamquartam, ſuper D G, Parallelogrammum D G H K, æquale ipſi B Rectilineo, habens angulum D G K rectum. Et protraho K H, donec ſecet C E in puncto L. Dico H L E F eſſe exceſſum Rectilinei A ſupra Rectilineum B.



Ac primùm C G K L vnum eſſe Parallelogrammum, clarius eſt quàm quod demonſtrari debeat. Quoniam igitur C D & D G, ex poſitu, ſunt æquales: & vtraque ipſi K L Parallelus: erunt, per trigeſimamſextam, duo Parallelogramma C H & D K æqualia. Et quoniam D K poſitum eſt æquale ipſi B Rectilineo: erit & C H ipſi B Rectilineo, æquale. Quare, quum totum C F Parallelogrammum, ſit æquale ipſi A Rectilineo: ſitq; L F exceſſus ipſius C F ſupra D K: erit, per communem Notionem, L F exceſſus A Rectilinei ſupra B Rectilineum: Quod erat manifeſtandum.

ALITER facilius. Maneat C D E F Parallelogrammum æ-

quale ipſi A Rectilineo. Et protractâ C D ad G punctum, conſtituatur ſuper D G, Parallelogrammum D G H K ipſi B Rectilineo æquale: productisq́; E C & H K, vt concurrant ad L punctum,



ducatur per D punctum, Dimetiens L D M, ſecans H G protractam, in puncto M. Et ducatur M N parallelus ipſi H L, ſecans E L in puncto N: vt ſit H L M N Parallelogrammum. Dico N F eſſe exceſſum Rectilinei A ſupra B Rectilineum.

Quum enim H D ſit æquale B Rectilineo, ſintq́; H D & D N Supplementa, per quadrageſimamtertiam, æqualia: erit quoque D N ipſi B Rectilineo æquale. Quo ablato à C F Parallelogrammo (quod poſitum fuit ipſi A æquale) remanebit N F exceſſus A ſuprà B: Quod erat faciendum.

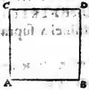
PROBLEMA 14, PROPOSITIO XLVI.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ex data recta linea Quadratum deſcribere.

Sit data linea A B, ex qua ſit deſcribendum Quadratum.

A punctis A & B, excito, per vndecimam, duas perpendiculares A C & B D: quarum vtramque, per tertiam, facio æqualem ipſi A B. Eruntq́;, per vltimam partem vigeſimæoctauæ, A C & B D Paralleli. Et connecto C D: quæ, per trigeſimamtertiam, erit æqualis & parallelus ipſi A B.



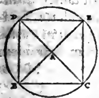
Quumq́; duo anguli A & B ſint recti: erunt & duo oppoſiti D & C recti, per vltimam partem vigeſimænonæ: vel, ſi mauis, per trigeſimamquartam. Quare, ex definitione Quadrati, erit A B C D Quadratum.

ALITER. Erigatur A C perpendicularis ad A B: eidemq́; ponatur æqualis. Et à puncto C ducatur C D parallelus & æqualis eidem A B: & connectatur D B: quæ, per trigeſimamtertiam, erit æqualis & parallelus ipſi A C. Quumq́;, per vltimam partem vigeſimænonæ, omnes anguli ſint recti: erit A B C D Quadratum: Quod faciendum fuit.

ANIMADVERTENDVM, veram Quadrati conſtructionem

nem è Centro, atq; ob id, è Circulo pendêre. In iis enim quæ perfecta ſunt, punctum vbique primum eſt ad quod omnia referuntur. Sic igitur producemus Quadratum non data linea.

Ex centro A, Circuli B C D E, educātur duæ lineæ A B & A C ad peripheriam, facientes angulum qui ad A rectum: & earum vtraque protrahatur in puncta D & E peripheriæ. Ac tum connectantur B C, C D, D E, & E B. Quum igitur quatuor anguli qui ad A ſint recti, per decimamquintam: & omnes lineæ æquales quæ illos comprehendunt, vtpotè à centro ad peripheriam: erunt, per quintam & trigeſimamſecundam, in quatuor Triangulis integrum Parallelogrammum componentibus, bini quique anguli, qui ad B, C, D, E, ſemirecti: vnde quatuor integri recti: & per quartam, quatuor baſes æquales. Quare B C D E Quadratum.



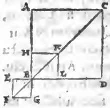
ATQVE eam ob cauſam præcipuam, tam myſtica ſemper habita eſt Decuſſatio: ea præſertim quæ ad rectos fit angulos, & vndique æqualitatem oſtendit: qualis in Quadrato & Circulo conſpicua eſt. Nam quòd Quadratum facimus ex ductu lineæ rectæ in ſeipſam, id ſenſus iudicio facimus, Artis ductu. Per centrum enim lineas duci, atque in ambitum, non in latum incedere par eſt. Punctum quippe illud fœcundiſſimum, lineas infinitas circumquaque procreat. Neq; quiſquam mihi obijciat: Quadratos Numeros, qui ex ductu lateris in ſeipſum producuntur, Diuerſa eſt enim Diſcretorum, & Continuorum conſideratio, quam hîc explicandi non eſt locus. Hoc tamen non nego, Artem nobis omni ratione amplectendam eſſe: quæ Naturam ſibi ſoli cognitam, patefacit: ſimilitudine & imitatione. Hæc enim quæ facit, affabrè quidem facit: ſed quò perfectiùs, eò occultiùs.

ANIMADVERTE etiam, Quadrato quatuor ineſſe Semidiametros, Hexagono ſex, Octagono octo, Trigono tres, Pentagono quinque, Heptagono ſeptem, Ennagono nouem: ſicq; Figuris continenter, pro angulorum numero. De Perfectis ſemper intelligo: ſcilicet de æquilateris & æquiangulis. Atque in paribus, Diametri terminantur ab angulo per centrum, ad angulum oppoſitum: in imparibus autem, imperfecta quadam

ratione, ab angulo per centrum, ad latus oppoſitum. In Circulo vtrumque ineſt. Diametri enim & ad latera & ad angulos educi intelliguntur:quum ſit ipſe, ſi hûc cogitatio pertingere poteſt, infinitorum angulorum, & infinitorum laterum. Quãto igitur plures in Figura fuerint Semidiametri, ea tanto propiùs ad Circulum accedit, tantoq; perfectior. Et tamen quanto pauciores habet,tanto majorem vſum habere videtur. Triãguli enim vſus quàm Quadrati frequentior: Quadrati rurſus quàm Pentagoni: Vt in his rerum humanarum imaginem cernamus. Minorum enim obſequio majores vtuntur. Sed de his aliâs plurà.

Quæ circa Diametrum Quadrati Parallelogramma, ſua latera Quadrati lateribus æquidiſtantia habuerint, Quadrata eſſe oportet.

Sit Quadratũ A B C D,cujus Diameter B C:ſintq; duo Parallelogramma B E F G & B H K L ſic poſita, vt latus E B ſit æquidiſtans lateri A C: & latus E F lateri C D: itidem latus H K eidem A C æquidiſtans, & K L ipſi A B: & Diameter C B protracta, dividat hæc duo Parallelogramma per mediũ. Dico B E F G & B H K L eſſe Quadrata.



Quoniam enim angulus A eſt rectus, duoq; anguli A B C & A C B, per quintam, æquales: erit horum vterque, per trigeſimamſecundam, ſemirectus. Quapropter & angulus E B F,per vigeſimamnonam,ſemirectus:quum C F cadat in duas Parallelos A C & E B: ob idq; per eandem, angulus B F G ſemirectus. Et quia latus E B, Trianguli E B F, per trigeſimamquartam, eſt æquale lateri F G Triãguli B F G:& B F vtrique cõmune:erit,per quartã,baſis E F æqualis baſi B G. Quumq; recta A G connectat duas parallelos A C & F G, & angulus A ſit rectus:erit & alternus G rectus, per vigeſimãnonam.Itaq;,per trigeſimamſecundam,erit angulus F B G ſemirectus: &, per ſextã, duo latera F G & B G æqualia. Erit igitur totus angulus E B G rectus: ac propterea, per trigeſimamquartam, totus F & totus E rectus:& quatuor latera Parallelogrammi E B F G,æqualia. Quare ipſum erit Quadratum. Eadem erit probatio de B H K L Parallelogrammo: Quod fuit conſtitutum.

Huic

Huic Propoſitioni hunc locum aſſignauimus: quam tamen poteramus ſtatim poſt trigeſimamquartam ſubijcere: Sed ad Quadrati mentionem reponere placuit, non vltrà: quamuis Euclides ad quartam Secundi diſtulerit.

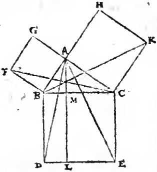
THEOREMA 33. PROPOSITIO XLVII.
Campano 46.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

In rectangulis Triangulis, Quadratum quod ex latere angulum rectum ſubtendente fit, Quadratis, quæ ex duobus angulum rectum continentibus lateribus fiunt, eſt æquale.

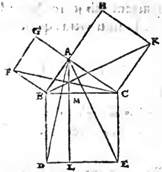
Sit Triangulum A B C, cujus angulus A rectus. Dico Quadratum lateris B C, Quadratis duorum laterum A B & A C eſſe æquale.

Deſcribam ex B C latere, ſecundùm doctrinam antecedentis, Quadratum B C D E: ſimul ex A B & A C, duo Quadrata A B F G & A C K H. Eritq; B H, ex decimaquarta Propoſitione, linea vna, & C G itidem vna: quum omnes anguli qui ad A ſint recti. Tum ab angulo A recto demittam ad latus D E maximi Quadrati, lineam A L parallelum lateri B D, ſecantem B C in puncto M. Et ab eodem angulo A ducam duas A D & A E: itemq; à duobus reliquis angulis A B C & A C B, duas B K & C F.



Quoniam itaque ſuper baſin B F, & inter duas parallelos C G & B F, conſtituũtur A B F G Parallelogrammum & B F C triangulum: erit A B F G, per quadrageſimãprimam, duplum ipſius B F C. At idem B F C, per quartam, æquale eſt A B D Triangulo: quũ ſint B F & B C latera vnius, æqualia A B & B D lateribus alterius: & angulus B hujus, æqualis angulo B illius: conſtat enim vterque ex angulo recto & angulo A B C com

communi. Eſt igitur Quadratum ABFG, duplum Trianguli ABD. Sed & Parallelogrammum BDLM duplum eſt, per quadrageſimamprimam, ejuſdem ABD Trianguli: ſunt enim ſuper eandem baſin BD, & inter duas parallelos BD & AL. Quare, per communem Notionem, Quadratum ABFG æquale eſt Parallelogrammo BDLM.



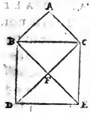
Atque, eadem argumentatione, inductis duobus BCK & AEC Triangulis, probabimus Quadratum ACKH eſſe æquale Parallelogrammo LMEC. Quare, quum Quadratum BCDE compleatur duobus Parallelogrammis BDLM & LMEC: ipſum erit æquale duobus Quadratis ABFG & ACKH: Quod erat demonſtrandum.

Hæc eſt illa tam celebris Demonſtratio à Pythagora Philoſopho perueſtigata: ob quam præ gaudio bouem Dæmonibus immolauit, ſi Heroni, Proclo, Lycio, & Vitruuio credimus. Quod tamen apud multos fidem non habet. Summa enim religione vir ille à cæde animantium abſtinuit. Vtut eſt, profectò mirabile inuentum eſt, & verè Dei cujuſdam donum. In cujus ratiocinatione, planè Philoſophica, libet paulùm expatiari: vt intueamur vnde hoc Theorema deſumptum ſit: quóque conſilio, ad hujus inueſtigationem ſeſe docti homines exercuerint.

Imprimis totius meditationis occaſio à Recto & Æquali profecta eſt: Ex quibus omnes ferè Geometricas probationes originem ſumere diximus. Quod ex Triangulo Iſoſceli Rectangulo, quod dimidium eſt Quadrati, manifeſtum faciemus.

Sit enim Iſoſceles Rectangulum ABC, cujus angulus A rectus. Dico Quadratum lateris BC, æquum eſſe Quadratis duorum laterum AB & AC. Deſcribo ex BC Quadratum BCDE: Cujus duco duas Diametros BE & CD, ſecantes inter ſe in puncto F. Quumq; duo latera BC & BD Trianguli BDC ſint æqualia: erunt, per quintam, duo anguli BDC & BCD æquales: ob idq; ambo ſemirecti, per trigeſimamſecundam: quum ſit angulus CBD rectus. Eadem ratione erunt duo anguli CBE & CEB, Trianguli BEC, ſemirecti: Quapropter duo latera BF &

C F Triāguli B C F, per ſextā, æqualia. Rurſus, quum duo anguli A B C & A C B Trianguli A B C, ſint ſemirecti, per quintam & trigeſimamſecundam : & baſis B C vtrique Triangulorum A B C



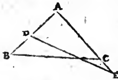
& B C F communis : erunt duo latera A B & A C, æqualia duobus lateribus F B & F C. per vigeſimamſextam. Eſt igitur A B F C quatuor laterum æqualium, & quatuor angulorum rectorū : quapropter, à Definitione, Quadratum. Iam verò, quum duo anguli F C E & F E C Trianguli C E F, ſint æquales duobus angulis F B C & F C B ipſius Trianguli C B F, vtpote omnes ſemirecti : & baſis B C æqualis baſi E C : erunt duo Triangula B C F & F E C æqualia. Ex communi itaque Notione, erit totum Triangulum B E C, æquale Quadrato A B F C. Atqui Triangulum B E C, per trigeſimamquartam, dimidium eſt Quadrati B C D E. Et Quadratum igitur A B F C dimidium eſt ejuſdem B C D E. Si itaque bis ſumatur A B F C, ratione duorum laterum A B & A C : duo Quadrata æquabuntur Quadrato B C D E : Quod erat demonſtrandum.

HÆC Demonſtratio amplior quidem : Sed tamen tota Figuræ ſpecie facilis : adeò Rectum & Æquale ſeſe, vbicunque ſint, manifeſta oſtendunt.

At in Scalenis Rectangulis excogitanda fuit alia Demonſtrationis ratio. Nam deficiente laterum æqualitate, deficiunt quæ ab hac pendent æqualitates Quadratorum & Triangulorum. Erat quidem in promptu hæc ratiocinatio, Cujuſlibet Trianguli Rectanguli, duo reliqui anguli à recto ſunt æquales duobus ſemirectis per trigeſimamſecundam. Conuenit igitur vt Quadrata duorum laterum ipſos ſubtendentium, quamuis inæqualium, tantum efficiant, quantum ſi eſſet vterq; ſemirectus : quum ſint baſes æquales. Quod enim vni laterum inæqualium decreſcit, alteri accreſcit : vt æqualitas potentiæ compenſetur (Potentia lineæ tanta eſt, quantum eſt ipſius Quadratum). Ac rationi conſentaneum eſt, vt potentia lateris rectum angulum ſubtendentis, æqualis ſit duabus laterum, quę duos ſemirectos ſubtendunt, potentiis. Magnitudo enim angulorum, magnitudinem laterum oppoſitorum metitur : & contrà.

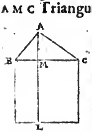
Quod vt clariùs exponamus: In duobus Triangulis Rectan-

gulis A B C & A D E, quorum A B C ſit Iſoſceles, ſed A D E Scalenum: notum eſt, ex vulgata illa trigeſimaſecunda, duos angulos ſemirectos A B C & A C B, Trianguli A B C, æquales eſſe duobus A D E & A E D Trianguli A E D, ſimul ſumptis. Sed non propterea notum eſt, ſi Quadratum baſis B C ſit æquale Quadratis duorum laterum A B & A C, continuò Quadratum baſis D E æquale eſſe Quadratis duorum laterum A D & A E: etiamſi duæ baſes B C & E D ſint æquales. Id verò Pythagoras probauit generali Demonſtratione. Quæ certè difficillima fuit inuentu, ſicut in diſquirendo experti ſumus. Nam quum ſimili ſtudio incenderemur, multa quidem in hanc rem meditati ſumus: ſcopum tamen alia ratione attingere non potuimus quàm per proportiones: idq; ex Figura Gnomonica. Sed nos hujus fontis vbertimi riuulos aliquot conſectemur.



Repetita igitur prima conſtructione, jucundum eſt intueri quonam pacto Rectum & Æqualitas hîc ſuum jus tueantur. Nam tametſi A B & A C latera ſint inæqualia, ob idq; anguli A B C & A C B inæquales: officiò tamen perpendicularis A M, pulchra fit permutatio: vt intelligantur omnia in integro remanere. Angulus enim C A M, angulo A B C: angulusq; B A M angulo A C M perpetuò eſt æqualis: Quod ſic demonſtratur:

Angulus B A C Trianguli A B C, ponitur rectus: angulusq; A M C Trianguli A C M, rectus: & angulus C vtrique Triangulo communis. Itaque, per trigeſimam ſecundam, & communem ſententiam, reliquus C A M angulus, reliquo A B C eſt æqualis. Rurſus, quum vterque angulus qui ad M ſit rectus, & angulus B probatus ſit æqualis angulo C A M: conſequitur vt reliquus B A M, reliquo A C M ſit æqualis: Quod erat demonſtrandum.

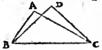


Vides vt perpendicularis æqualitatem teſtetur, non laterum ſingulorum, ſed potentiæ ipſorum. Hoc eſt, ſi Quadratum lineæ B C ad duo Quadrata æqualia reducatur: hæc erunt æqualia Quadratis duorum laterum A B & A C. Vbi etiam animaduertendum, eæ lineæ vt præſtent mutuas operas, officij permutatione. Nam ex ſubtenſa B C fiunt duo latera Triangulorum

rum aduentitiorum A B M & A C M: Et ex duobus lateribus primi Trianguli A B C, rectum angulum continentibus, fiunt duæ ſubtenſæ. Sed quonam modo fiat ea reductio Quadratorum ad æqualitatem, placet hîc demonſtrare.

Duo Quadrata inæqualia ad duo Quadrata æqualia reducere.

Sint Quadrata duarum linearum A B & A C, inæqualia. Volo hæc duo reducere ad duo Quadrata æqualia. Ambas lineas conſtituo ad angulum rectum B A C: & connecto B C. Tum ſuper duobus terminis B & C facio duos angulos ſemirectos (id verò fiet erectis perpendicularibus, ac diuiſo vtroque angulorum rectorum per æqualia: vt docet nona hujus): ſintq; anguli B C D & C B D ſemirecti: & concurrant duæ lineæ B D & C D ad punctum D. Dico duo Quadrata laterum B D & C D, eſſe æqualia duobus Quadratis laterum A B & A C.



Sunt enim, per ſextam, duo latera D B & D C æqualia: & angulus D, per trigeſimamſecundam, rectus: Quapropter Quadratum lateris B C, æquale eſt Quadratis duorum laterum D B & D C, per hanc quadrageſimamſeptimam. Sed & æquale Quadratis duorum A B & A C, per eandem. Quare, per animi Notionem, Quadrata duorum D B & D C ſunt æqualia duorum A B & A C Quadratis: Quod erat faciendum.

Ex hoc habetur & hoc Theorema,

Si duo Triangula rectangula æquales ſubtenſas habuerint: Quadrata duorum reliquorum laterum unius, ſunt æqualia Quadratis duorum reliquorum alterius.

Quod ſatis patet ex poſtrema conſtructione.

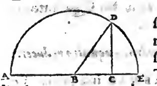
Sed & indidem hoc exibit Problema,

Propoſitis duabus lineis inæqualibus, potentiam majoris ſupra minorem cognoſcere.

Potentiam lineæ tantam eſſe diximus, quantum eſt ipſius Quadratum.

Sint itaque duæ lineæ inæquales A B & B C, quarum major A B. Volo ſcire quantùm poſſit A B ſupra B C. Hoc eſt, volo re-

perire Quadratum, quod cum Quadrato ipſius B C, ſit æquale Quadrato lineæ A B.



Statuo A B & B C in continuum: poſitoq; Centro in puncto continuationis B, deſcribo Semicirculum A D E ſecundùm quantitatem majoris A B. Tum ſuper C puncto, erigo perpendicularem: quam produco donec attingat peripheriam in pũcto D: Et connecto B D. Dico Quadratum lineæ C D eſſe exceſſum potentiæ lineæ A B ſupra B C.

Quoniam enim angulus C Trianguli B C D, eſt rectus: Quadratum ſubtenſæ B D, æquale eſt Quadratis duorum laterum B C & C D: igitur & iiſdem eſt æquale Quadratum lineæ A B. Quare Quadratum lineæ B C tanto minus eſt Quadrato lineæ A B, quantum eſt Quadratum lineæ C D: Quod erat inueſtigandum.

Hanc Theon ſubnectit decimætertiæ Decimi: eamq; probat ex prima Quarti & trigeſima Tertij: quam tamen ex hac ſola Pythagorica demonſtrari vides.

E x hoc etiam habetur ratio inueniendi tertij lateris Trianguli Rectanguli, duobus quibuſuis cognitis. Quod clarius eſt, quàm quod probandum ſit.

N V N C autem hoc Theorema quonam pacto ad Numeros accommodetur, obiter oſtendemus. In Numeris itaque locum præcipuè habet, quum maximus ad medium fuerit vt 5 ad 4: ſcilicet in proportione, quam vocant, ſeſquiquarta: & medius ad minimum vt 4 ad 3: hoc eſt, in proportione ſeſquitertia. Ejuſmodi ſunt tres, 3, 4, 5: tresq; 6, 8, 10: & 12, 16, 20: ſicq; continuo progreſſu. Quadratum enim 20 eſt 400: ac tantundem efficiunt 144 cum 256, quæ ſunt Quadrata ex 12 & 16.

Sed & cognito minimo laterum in Numeris, Scalenum Rectangulum ſic abſolues. Dimidium cogniti duc in ſe: à producto aufer vnitatem: habebis alterum latus. Huic adde binariũ: fiet maximum latus, ſeu ſubtenſa. Vt, ſit minimum latus 10. Horum dimidium duc in ſe: fiunt 25: à quibus ablata vnitate, ſuperſunt 24, medium latus. his adde binarium: fiunt 26, ſubtenſa. Horum enim Quadratum 676: Et tantundem efficiunt

100

100 & 576: Quadrata ex 10 & 24.

Iſoſcelia verò Rectangula ex Numeris non conficiuntur. In quo id dignum conſideratione eſt, quod in Geometricis eſt euidentius & Demonſtrationi promptius, id in Numeris veritatem non habere. Nunquam enim duo Quadrati numeri æquales quadratum Numerum componunt. Atque eam ob cauſam, lateris Quadrati ad Diametrum proportio incognita. Eſt enim Diameter radix ſeu latus duorum Quadratorum æqualium in vnum Quadratum junctorum: ob id, irrationale: hoc eſt, vt in Arithmeticis dicitur radix Surda. Vt radix 2, 8, 32: ſicq; continenter, alternis Numeris Progreſſionum intermiſſis.

Illud quoque non omittam, hoc Theorema Pythagoricum non ex Triangulo, ſed ex Parallelogrammo Rectangulo eſſe depromptum. Quod & Numerorum affinitas oſtendit. Nullum enim Numeris cum Triangulis commercium: neque Superficies per Numeros abſoluitur, niſi multiplicatione. Multiplicatio verò, minimùm, quadrilatera eſt. In Geometricis etiam Superficiebus, Triangula vt dimidia Parallelogrammorum conſiderari debent. Sic itaque proponi poterat Theorema.

In Parallelogrammis Rectangulis, Quadratum quod à Dimetiente fit, æquale eſt duorum quæ ſubtendit laterum, Quadratis.

Quia tamen ſimpliciora ſunt Triangula, atque ob id tractabiliora: eorum nobis officium acceſſimus: Sed de his aliâs.
Ex hoc etiam ſatis euidens eſt illud,

Data Diametro, componere Quadratum cuius eſt Diameter.

Conſtitutis enim ſuper duobus terminis lineæ, duobus angulis ſemirectis, & perfecto Triangulo: habebitur dimidium Quadrati: Cujus altera pars facilè conficietur.
Inde manifeſtum eſt & illud,

Quadratum Diametri, duplum eſt Quadrati cuius ipſa eſt Diameter.

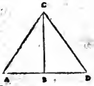
Quod nulla indiget probatione.

THEOREMA 34, PROPOSITIO XLVIII.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστι.

Si quod ab vno laterum Trianguli fit Quadratum, æquale fuerit duorum reliquorum Quadratis: angulus ab illo latere ſubtenſus, rectus erit.

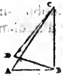
Sit Triangulum A B C: ſitq; Quadratum lateris A C æquale Quadratis duorum laterum A B & B C. Dico angulum B oppoſitum A C lateri, eſſe rectum. Conuerſa antecedentis.



A puncto B ad contrariam partem ipſi A puncto, educo perpendicularem B D, per vndecimam: quam pono æqualem A B, per ſecundam: Et connecto D C.

Et quoniam angulus C B D rectus eſt: Quadratum lateris C D, per antecedentem, æquale eſt Quadratis duorum laterum B C & B D: quapropter & Quadratis duorum B C & B A. Eſt igitur ipſum C D latus ipſi A C lateri æquale, per animi Notionem: quum vtriuſque Quadrata ſint æqualia. Triangulum itaque A B C, æquale eſt & æquilaterum Triangulo C B D. Quare angulus A B C, per octauam, angulo C B D æqualis: ob idq; rectus: Quod erat demonſtrandum.

Probabimus & ab impoſſibili Conuerſarum more. Si enim Quadratum lateris A C eſt æquale Quadratis duorum A B & B C: neque angulus B ſit rectus: erit major aut minor recto. Ac prius ſit major recto, fiatq; angulus D B C rectus, educta perpendiculari B D, per vndecimam: quæ ponatur æqualis lateri A B, per ſecundam: Et connectatur C D. Eritq;, per directam hujus, Quadratum ipſius C D æquale Quadratis duorum B D & B C: quapropter & Quadratis duorum B A & B C. Erit igitur



baſis C D æqualis baſi C A: quum ipſarum Quadrata ſint æqualia: Quod eſt contra vigeſimamquartam Propoſitionem. Nam quum ſit angulus A B C major angulo D B C, ſintq; duo latera A B & B C duobus lateribus D B & B C mutuò æqualia: erit baſis C A major baſi C D. Eadem ratione probabimus angulum

lum totum B, non eſſe recto minorem. Eſt igitur rectus: Quod erat demonſtrandum.

Sed probationes quæ affirmatè concludunt, digniores ſunt iis quæ ab impoſſibili.

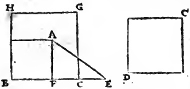
Ex Campano.

Propoſitis duobus Quadratis, alteri illorum Gnomonem reliquo æqualem adiungere.

Licet intempeſtiuè Campanus Gnomonis conſtructionem hîc appoſuiſſet, quum Euclides Gnomonem poſteriùs definiat: ejus tamen Propoſitionem loco non mutauimus: præſertim quum Gnomonem jam antea in quadrageſimatertia definierimus.

Sint itaque duo Quadrata A B & C D: quorum alteri, vt ipſi A B, ſit adjungendus Gnomon æqualis reliquo C D.

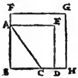
Protrahatur latus B F Quadrati A B in continuum: & ponatur F E æqualis lateri ipſius C D: Et connectatur E A. Eritq; Quadratum ipſius E A, æquale duobus Quadratis E F & F A Trianguli E F A, per Quadrageſimamſeptimam. Sed Quadratum ipſius E F, eſt æquale ipſi C D Quadrato. Et Quadratum lateris F A, eſt ipſum A B Quadratum. Eſt igitur Quadratum ipſius A E æquale duobus C D & A B Quadratis. At verò E F & F A latera ſunt, per vigeſimam primi, longiora latere A E. Sed F A eſt æquale F B. Erunt ergo E F & F B, ipſo A E longiora. Quapropter tota B E longior eſt quàm A E. Secetur igitur ad ipſius æqualitatem in puncto C: fiatq; B C æqualis ipſi A E: Et deſcribatur Quadratum B C G H ex ipſa B C: quod erit æquale Quadrato ipſius A E. Sed Quadratum A E duobus quadratis A B & B C eſt æquale. Et quadratum igitur B C G H æquale eſt eiſdem. Quare, quum Quadratum ipſius B C componatur ex Quadrato A B & Gnomone F G A H: erit Gnomon ipſi C D Quadrato æqualis: Quod fuit faciendum.



SED multò expeditiùs ſic poterat confici:

Sint duo Quadrata, quorum latera ſint A B & B C. Volo Quadrato

drato lineæ A B adjũgere Gnomonem æqualem Quadrato lineæ B C.



Conſtituo ambas, ad angulum rectum A B C. Et connecto A C. Deſcriptoq; Quadrato lateris A B, quod ſit A B D E, protraho B A ad punctum F: vt ſit B F æqualis A C. Et deſcribo Quadratum B F G H: quod erit æquale Quadrato ipſius A C, quum lineæ ſint æquales: ac propterea æquale Quadratis duorum A B & B C. Quum itaque B F G H Quadratum, compleatur ipſo Quadrato A B D E & Gnomone F E G D: erit ipſe Gnomon æqualis Quadrato lineæ B C: Quod erat faciendum.

Libri primi Geometricorum Elementorum finis.

IACOBI PELETARII CENOM. IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA

Demonſtrationum Liber ſecundus.

DEFINITIONES.

Parallelogrammum Rectangulum.

Αν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.

Omne Parallelogrammum Rectangulum, ſub duabus rectum angulum conſtituentibus rectis lineis dicitur cõtineri.

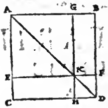
Parallelogrammum Rectangulum fit ex ductu lineæ rectæ in lineam rectam : idq́; inſtar Numerorum: facilitatis,vt diximus, gratiâ. Vbi etiam meminiſſe oportet : Ducere majorem lineam in minorem , idem eſſe ac ſi minorem in majorem ducamus:ſicut 3 in 4, & 4 in 3, idem efficiunt.

Gnomon.

Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ἓν παραλληλογράμμων ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι, γνώμων καλείσθω.

In Parallelogrammis,alterutrum Parallelogrammorum quæ circa Dimetientem conſiſtunt cum duobus Supplementis, Gnomon vocatur.

Hoc jam antè in quadrageſimatertia Primi explicauimus. Si enim in Figura adſcripta, Parallelogrammũ H F cum duobus Supplemẽtis C K & K B ſumamus, efficietur Gnomon E D G: ſeu, vt alij deſignant, C D G K: quod vnum & idem eſt. Quòd ſi Parallelogrammum E G cum eiſdem Supplemẽtis ſumpſerimus, fiet Gnomon F A C K. Deeſt itaque Gnomoni alterutrum interiorum Parallelogrammorum quæ Dimetiens media ſecat: quæq; Complementa in quadrageſimatertia Primi nominauimus.



THEOREMA PRIMVM,

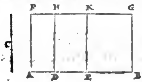
PROPOSITIO PRIMA.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν, ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Si duarum linearum altera in partes aliquot ſecta fuerit: quod ex ductu alterius in alteram fit, æquum eſt iis quæ ab inſecta & quolibet ſegmento Rectangulis, producuntur.

Sint duæ lineæ A B & C: quarum A B ſecta ſit in partes A D, D E & E B. Dico id quod fit ex ductu C in A B, æquale eſſe Rectangulis quæ fiunt ex ductu ejuſdem C in A D, D E, & E B ſegmenta.

Super puncta A & B, erigam lineas perpendiculares A F & B G, per vndecimam Primi: & ponam vtramq; æqualem ipſi C: Et connexâ F G, complebo Parallelogrammum Rectangulum A B F G. Quod quidem ex linea A F (ea eſt linea C) in A B producitur. Tum à punctis ſectionum D & E ducam, per trigeſimamprimam



Primi,

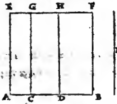
Primi, ipſis A F & B G, parallelos D H & E K: quarum vtraque eſt æqualis C, quum vtraque ſit æqualis A F, per trigeſimamquartam Primi. Et quoniam Rectangulum A D F H producitur ex ſegmento A D in A F (hoc eſt in C), & D E H K ex ſegmento D B in eandem C: ac deníque E B K G ex ſegmento E B in eam ipſam: atq; hæc tria totum Parallelogrammum A B F G componunt: manifeſta eſt Propoſitio.

THEOREMA 2, PROPOSITIO II.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Si recta linea vtcumque ſecta fuerit: quæ ſub tota & quolibet ſegmentorum Rectangula continentur, æqualia ſunt ei quod ex tota fit Quadrato.

Sit linea A B diuiſa in A C, C D, & D B ſegmenta. Dico Rectangula quæ fiunt ex ſegmentis in ipſam A B ſimul ſumpta, æqualia eſſe Quadrato eiuſdem A B.



Quod manifeſtum erit, deſcripto quadrato A B E F, ductiſq; lineis C G & D H, quę ſint lateribus Quadrati paralleli & æquales.

ALITER. Sumatur K æqualis A B. Eritq; , per antecedentem, quod fit ex K in totam A B, æquale iis quæ fiunt ex eadem K in quælibet ſegmenta ipſius A B. Et quia quod ex K in A B, æquale eſt ei quod ex A B in ſeipſam: & quæ ex K in quælibet ſegmenta ipſius A B fiunt, æqualia iis quæ ex A B in ſuas partes, propterea quòd K & A B ſunt æquales: conſtat Propoſitio.

THEOREMA 3, PROPOSITIO III.

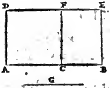
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ὡς ἔτυχε τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Si in duo ſegmenta fuerit vtcumque linea diuiſa: quod ex tota in alterutrum ſegmentorum fit Rectangulum,

gulum, æquale eſt ei quod ex ſegmentis fit rectangulo, eiq; quod ex priori ſegmento fit Quadrato.

Sit linea A B diuiſa in A C & C B ſegmenta. Dico Rectangulum ex tota A B in A C ſegmentum, æquale eſſe Rectangulo quod ex A C in C B, eiq; quod ex A C in ſeipſum ſimul ſumptis.

Deſcribatur ex A C, Quadratum A C D F: Et productâ D F ad E punctum, connexaq; B E parallelo, perficiatur Parallelogrammum A B D E. Quod quum conſtet ipſo Quadrato A C D F, & Parallelogrammo F B, quod eſt ex C B in A C: manifeſta eſt Propoſitio.



A L I T E R, ex prima hujus. Sumatur G æqualis A C. Et quoniam totum B D Parallelogrammum fit ex G in A B, quum ſint A D & G æquales: & C D Quadratum ex eadem G in A C ſegmenta (lineæ enim æquales ſunt) & denique F B Parallelogrammum, ex eadem G in C B ſegmentum: atque his æquale eſt quod fit ex G in A B, per primam hujus: erit quod fit ex A C in A B æquale ei quod fit ex A C in B C, & in ſeipſum: Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 4, PROPOSITIO IIII.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἔςαι τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Si recta linea ſecetur vtcumque: Quadrata quæ fiunt ex ſegmentis cum eo quod bis ſub ipſis ſegmentis comprehenditur Rectangulo, æqualia ſunt ei quod à tota fit Quadrato.

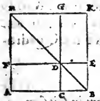
Conſectarium.

Quæ circa Dimetientem Quadrati conſiſtunt Parallelogramma, Quadrata eſſe oportet.

Sit recta linea A B, ſecta in partes A C & C B. Dico duo quadrata ex A C & C B, cum eo quod bis ſub iiſdem A C & C B continetur Rectangulo, eſſe æqualia quadrato totius A B.

Ex

Ex altera partium, vt ex C B, deſcribo Quadratum C B D E: & productis lateribus E D & C D, ponam D F & D G æqualia ipſi A C, & perficiam Quadratum D F G H: Quod conſtat eſſe Quadratum ipſius A C. Tum connexâ F A; erit C F Parallelogrammum Rectangulum, per trigeſimamtertiam & trigeſimamquartam Primi; Quod eſt ex C B in A C: quum C D ſit ipſi C B æqualis. Similiter conſtituo alterum Parallelogrammum Rectangulum D K, productis B E & H G, quæ concurrant ad punctum K: quod eadem ratione fit ex C B in A C. Quoniam ergo duo anguli D F H & D F A ſunt recti: erit per decimamquartam primi, A H linea vna: & eadem ratione H K linea vna, & B K etiã vna. Et quia G K ipſi C B eſt æqualis: & A F eidem C B, quia æqualis ipſi E B: item H F & H G ipſi A C: erunt duæ A H &



H K toti A B æquales, per ſecundam animi Notionem. Itidem & B K eidem A B æqualis. Quũ itaque quatuor anguli A, B, H, K ſint recti; erit A B H K Quadratum, & nonniſi ipſius A B, quum ſit vnum laterum. Quare, quum ipſum compleatur Quadratis duarũ A C & C B, duobusq; Supplementis quæ ſub C B & A C, comprehenduntur: conſtat Propoſitio.

HANC Demonſtrationem, meo judicio, expeditiorem reddidi, quàm ſit ea quæ per Diametros & angulos ſemirectos aſtruitur verboſius. Nihil eſt enim quod magis oneret memoriam, quàm longè ducta Demonſtratio: in iis præſertim Propoſitionibus quas vel ipſa conſtructio manifeſtas reddit. Diametrum tamen appoſuimus: vt quouismodo conſtitutio innoteſceret. Scilicet deſcripto Quadrato B D, & ejus Diametro productâ, dum concurrat cum A F priùs erectâ, ad punctum H: tum perfectum A B H K Parallelogrammum probabitur eſſe Quadratum: & D F G H itidem Quadratum, per ſemirectos angulos Triangulorum. Quod ego ratiocinationi cujuſque relinquo.

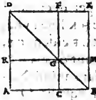
ALITER. Sit linea A B, vt priùs, diuiſa in A C & C B. Eritq; per ſecundam hujus, quod fit ex tota A B in ſe, æquale ei quod fit ex ipſa in A C & C B. At ex ipſa in A C tantum fit, quantum ex A C in ſe & ex A C in B C, per tertiam hujus. Item ex ipſa A B tota in B C, tantum fit, quantum ex C B in ſe & ex C B in A C, per eandem.

m 3 dem.

dem. Quod igitur fit ex tota A B in ſe, æquum eſt iis quæ fiunt ex A C in ſe & in C B, & ex C B in ſe & in A C: Quod erat demonſtrandum.

Hæc ſecunda Demonſtratio eſt Campani. Sed, vt ipſe ſubijcit, ex ea non conſtat Conſectarium. Quod nos quum jam probauerimus ad quadrageſimamſextam Primi: hoc ipſum Theorema ſic facilè oſtendemus.

Ex ipſa A B, diuiſa in A C & C B vt priùs, conſtituatur Quadratum A B D E, cujus Diameter B D: ducatur Parallelus C F ſecans



Diametrum in puncto G: itemq; altera Parallelus H K per idem punctum G. Ac tum, ex Demonſtratione noſtra, erunt K E & C H Quadrata, eaq; ipſorum A C & C B: vt ſatis conſtat ex conſtructione. Præterea duo A G & G E: Supplementa, ſunt quæ fiunt ex A C in B C. Quare, quum hæc quatuor perficiant totum A B D E Quadratum: manifeſta eſt Propoſitio.

Hæc etiam proponi poteſt in hæc verba,

Si duæ lineæ inæquales fuerint: quod fit ex maiori in ſeipſam, æquum eſt ei quod ex minori in ſeipſam cum duobus, quæ fiunt ex exceſſu in maiorem & ex eodem in minorem, Parallelogrammis.

Scilicet A B linea excedat A C lineam, portione C B. Conſtabit Quadratum majoris A B, Quadrato minoris A C cum eo quod fit ex C B in A B (vt eſt in poſteriore Figura Parallelogrāmum A H), & altero quod fit ex eodem C B in minorem A C, quod eſt G E Parallelogrammum.

In quo rerum imaginem jucundè contemplari ſubit. Nempè quod deeſt lineæ A C, ducetur in ipſam: hoc eſt, C B in A C: ſed & quod ſupereſt ipſi A B (id ipſum verò eſt C B) ducetur in ipſam A B: ſicq; ex duabus vna fiet potentia.

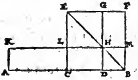
THEOREMA 5, PROPOSITIO V.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Si recta linea ſecetur in duo æqualia duoq; inæqual

qualia: Rectangulum comprehenſum ſub inæqualibus ſegmentis totius vnà cum Quadrato quod à medio ſegmentorum, æquale eſt ei quod à dimidia fit Quadrato.

Sit recta linea A B æqualiter diuiſa in puncto C, & inæqualiter in puncto D. Dico Quadratum C B, eſſe æquale ei quod fit ex A D in D B cum Quadrato C D.



Deſcribam ex C B Quadratũ C B E F, cum Diametro B E: & ducam D G ipſi B F parallelum, ſecantem Diametrum in puncto H, & E F in puncto G. Et per punctum H ducam K M æqualem & æquidiſtantem A B, per trigeſimamprimam Primi, ſecantem B F in puncto M, & C E in puncto L: Et connectam A K æquidiſtantem C E. Eruntq;, per Conſectarium antecedentis, ſeu per ea quæ probauimus ad quadrageſimamſextam Primi, L G & D M Quadrata: L G quidem lineæ C D: & D M, lineæ D B. Et quia D H eſt æqualis D B: erit A H id quod fit ex ductu A D in D B. Et quia, per quadrageſimamtertiam Primi, duo Supplementa C H & H F ſunt æqualia: addito Parallelogrammo D M vtriq; erit C M æquale D F. Quum itaque A L ſit æquale C M, per trigeſimamſextam Primi: erit & ipſum æquale D F. Gnomon igitur C B G H æqualis eſt A H Parallelogrammo. Sed Gnomon ipſe cum Quadrato L G, conſtituit Quadratum dimidiæ A B. Quare A H Parallelogrammum & Quadratum L G, ſunt æqualia Quadrato dimidiæ A B: Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 6, PROPOSITIO VI.

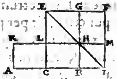
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Si recta linea in duo æqualia ſecetur, alia verò ei linea addatur in continuum: quod ex tota iam compoſita

ſita in eam quæ addita eſt, cum Quadrato quod fit à dimidia, æquum eſt ei quod à dimidia cum addita tanquàm ab vna, fit Quadrato.

Sit linea A B æqualiter diuiſa in puncto C: eiq; addita B D. Dico id quod fit ex compoſita A D in additam B D cum Quadrato dimidiæ C B, eſſe æquale Quadrato C D.

Deſcribam ex C D, Quadratum C D E F, cujus ſit Diameter B D. Et ducam B G æqualem & æquidiſtantẽ D F, quæ ſecet Diametrum in puncto H. Et per ipſum H punctum, ducam K M æqualem & æquidiſtantem A D, ſecantem D F in puncto M, & C E in puncto L: Et connectam A K æquidiſtantem C L. Iam per Conſectarium quartæ hujus, vtrumque Parallelogrammum L G & B M eſt quadratum: hoc quidem ex B D, illud verò ex C B: & proptereà D M æqualis B D: totumq; A M Parallelogrammum, eſt quod fit ex A D in B D. Quia ergo, per trigeſimamſextam Primi, A L eſt æquale C H: &, per quadrageſimamtertiam ejuſdem, Supplementum C H æquale Supplemento H F: erit & A L eidem H F æquale. Quare Gnomon C D G H, toti A M Parallelogrammo æqualis. Sed Gnomon C D G H cum quadrato L G, conſtituit quadratum lineæ C D. Quare A M Parallelogrammum cum quadrato L G, æquale eſt quadrato lineæ C D: quod fuit demonſtrandum.

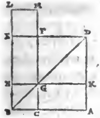


THEOREMA 7, PROPOSITIO VII.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Si recta linea ſecetur in duas quantaſcumq; partes: Quadratum quod à tota cum Quadrato quod ab vna partium, æquale eſt ei quod bis producitur ex tota in ipſam partem Rectangulo, cum eo quod ex altera parte fit Quadrato.

Sit



Sit linea A B, fortuitò diuiſa in puncto C. Dico quadratum totius A B cum quadrato B C, æquale eſſe ei quod bis fit ex A B in B C cum quadrato A C.

Deſcribatur quadratum totius A B, quod ſit A B D E, cujus Diameter B D: ducaturq; C F æqualis & æquidiſtans B E, ſecans Diametrum in puncto G: & per G punctum, H K æqualis & æquidiſtans A B.

Quia igitur Quadratum A E cum Quadrato C H, eſt æquale Quadrato K F cum duobus Parallelogrammis A H & C E: patet Propoſitio.

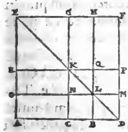
Si quis manifeſtiùs perſpicere velit, faciat H M Parallelogrammum æquale H A Parallelogrammo, vt E M ſit Quadratum B C. Ac tum omnes apparebunt Propoſitionis particulæ.

THEOREMA 8. PROPOSITIO VIII.

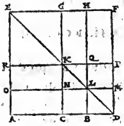
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Si recta linea ſecetur vtcunque: Rectangulum comprehenſum quater ſub tota & vno ſegmentorum cum eo quod ex altero ſegmento fit Quadrato, æquale eſt ei quod à tota cum priori ſegmento tanquam ab vna deſcribitur, Quadrato.

Recta linea A B ſecetur vtcunque in puncto C. Dico id quod quater ſub A B & C B continetur Rectangulum vnà cum Quadrato quod ex A C, æquale eſſe ei quod ex A B & B C tanquam ex vnica linea, Quadrato.



Producatur A B in D punctum, & ſit B D æqualis C B: Et ex A D deſcribatur quadratum A D E F. Tum ducta Diametro D E, lineiſq; C G & B H parallelis & æqualibus ipſi D F, quæ ſecent Diametrum in punctis K & L: & per ipſa K & L puncta, ductis M O & P R parallelis & æqualibus ipſi D A:



Erit, per Conſectarium quartæ hujus, vnaquæq; Superficierum R G, N Q, B M, & C P, quadrata. Quumq; B D & B L latera Quadrati B M, ſint æqualia C B & B L lateribus Parallelogrammi C L: erit & ipſum C L Quadratum: ſimiliq; ratione L P Quadratum: ob idq; quatuor Quadrata componentia C P Quadratum, inter ſe æqualia. Et quia totus Gnomon A D G K, circumſtans Quadratum R G, eſt, per trigeſimamſextam, & quadrageſimamtertiam Primi, quadruplus ei quod ex A B in B D fit Rectangulo, quia quadruplus ad Superficiem A L: conſtat Propoſitio: Scilicet A L ſumptum quater cum Quadrato R G, eſſe Quadrato A D E F æquale.

De Gnomone autem euidentiùs perſpiciemus, ſi aduerterimus Superficiem mutilam A D K R, eſſe duplam ad ſuperficiem A L. Duo enim Triangula K N L & L B D, ſunt æqualia Quadrato C L. Idemq; de altera parte D F G K ſit judicium. Quod nos ſi prolixiùs exponeremus, ingenium ſtudioſorum obrueremus potiùs quàm inſtrueremus. Eæ enim figurationes Gnomonum ejuſmodi ſunt, vt ſeſe ob concinnitatem ſponte elucident.

Campanus hoc Theorema proponit in hæc verba,

Si linea in duas partes ſecetur, atque ad ipſam addatur recta linea vni ſegmentorum æqualis: quod ex tota compoſita in ſeipſam fiet, æquale erit iis quæ ex ductu prioris lineæ in ipſam additam quater, & ei quod ex altero ſegmento fit Quadrato.

Id verò in idem recidit cum priore. Eſt enim B D ipſi C D perpetuò æqualis. Sed tamen ejuſmodi varietates inutiles non ſunt: quippe quæ ingenium ad horum Theorematum praxin & vſum inſtructius reddant. Neque incommodè fecerit qui ſe in Propoſitionibus Geometricis, hujus præſertim Secundi libri, variandis, immò & nouis excogitandis exercuerit. Cujuſmodi ſatis multas adſcribere poſſemus. Sed eæ priuatim à Geometra ſunt examinandæ, non inter reliquas collocandæ. Tædiboſum eſt enim hæc Theoremata congerere quæ cum Numeris communicant. Eamq; ob cauſam, nec ſine judicio paucis fuit

cont

contentus Euclides.

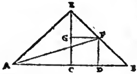
THEOREMA 9. PROPOSITIO IX.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Si recta linea in duo æqualia duoq; inæqualia diuidatur: quæ ab inæqualibus totius ſegmentis fiunt Quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia cum eo quod à medio ſegmentorum fit Quadrato.

Sit linea A B diuiſa æqualiter in puncto C, & inæqualiter in D. Dico duo Quadrata quæ ex A D & D B, dupla eſſe duorum quæ ex A C & C D, Quadratorum.

Super punctum C erigo perpendicularem C E, æqualem vtrique A C & C B: Et connecto E A & E B. Eruntq;, per quintam & trigeſimamſecundam Primi, duo anguli A & B ſemirecti: & vterque qui ad E, ſemirectus: ſicq; totus E rectus. Erigo itaque D F perpendicularem ſuper A B, ſecantem E B in puncto F. Et erit, per eandem trigeſimamſecundam, angulus B F D ſemirectus: quapropter D B & D F latera, per ſextam Primi, æqualia. Iam à puncto F duco F G æquidiſtantem, ob idq; æqualem C D. Et erit, per ſecundam partem vigeſimænonę, & per trigeſimamſecundam Primi, vterque angulus qui ad G, rectus, & angulus



E F G ſemirectus: eſt enim F E G ſemirectus. Quapropter E G & F G, latera, per ſextam Primi, æqualia. Tandem connecto A F. Et quoniam Quadratum E F, per quadrageſimamſeptimam Primi, æquale eſt Quadratis duarum E G & G F: ipſum erit duplum ad Quadratum G F: ob idq; ad Quadratum C D. Eadem ratione erit Quadratum E A duplum ad Quadratū A C. Quúmque Quadratum A F ſit æquale Quadratis A E & E F, per eandem: ipſum erit duplum ad Quadrata A C & C D. Sed & idem Quadratum A F æquale eſt Quadratis A D & D F. Et Quadrata igitur A D & D F dupla ſunt ad Quadrata A C & C D. Et quia Quadratum D B eſt æquale Quadrato D F: erunt duo Quadra-

ta A D & D B, dupla ad duo A C & C D: Quod erat demonſtrandum.

IN HAC contueri licet quantam vim habeant Rectum & Æquale. Quatuor enim Triangulis Iſoſcelibus Rectangulis, id eſt, quatuor Semiquadratis, tota nititur probatio.

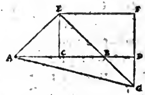
THEOREMA 10, PROPOSITIO X.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Si recta linea ſecetur in duo æqualia, apponatur autem ei alia in continuum: quod ex tota iam compoſita, quodq; ex appoſita ambo fiunt Quadrata, dupla ſunt amborum, eius ſcilicet quod ex dimidia, eiusq; quod ex dimidia cum appoſita, Quadratorum.

Sit recta linea A B æqualiter diuiſa in puncto C: eiq; in continuum appoſita B D. Dico id quod fit ex A D Quadratum cum Quadrato quod ex B D, duplum eſſe ejus quod ex A C cum eo quod ex C D Quadrato.

Erigo C E perpendicularem ſuper A B, & æqualem vtrique linearum A C & C B: Et connecto A E & E B. Eritq;, per quintam & trigeſimamſecundam Primi, vterque angulus A & B: item vterque qui ad E, ſemirectus: totusq; E rectus.



A puncto itaque E, duco E F æqualem & æquidiſtantem C D: & connecto F D, quam protraho donec concurrat cum linea E B protracta, ad punctum G: Tum connecto A G.

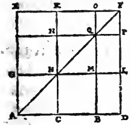
Et quia angulus E C D eſt rectus: erit, per vltimam partẽ vigeſimænonæ Primi, angulus C E F rectus. Quum igitur angulus C E B ſit ſemirectus: erit & F E G ſemirectus. Quumq; F D, per trigeſimamtertiam Primi, ſit æquidiſtans B C: erit, per trigeſimamquartam ejuſdem, angulus qui ad F, rectus: ſicq; angulus E G F, per trigeſimamſecundam, ſemirect

mireɛtus: quia F E G ſemireɛtus. Et per eandem angulus D B G ſemireɛtus: quum angulus B D G, per decimamtertiam ejuſdem, ſit reɛtus. Duo igitur latera E F & F G, per ſextam ejuſdem, ſunt æqualia: itidemq; duo B D & D G æqualia. Quapropter Quadratum E G, per quadrageſimamſeptimam Primi, duplum eſt ad Quadratum E F: ob id, & ad Quadratum C D. Quadratum item A E, per eandem, duplum eſt ad Quadratum A C. Quumq; Quadratum A G, per eandem, ſit æquale duobus Quadratis A E & E G, ſimiliter & duobus Quadratis A D & D G: ſitq; Quadratum D G æquale quadrato B D: erunt duo quadrata A D & D G (ea ſunt A D & B D) dupla duobus Quadratis A C & C D: Quod fuit demonſtrandum.

ALITER. Sit linea A B bifariam diuiſa in C, eiq; in continuum adjunɛta B D. Dico Quadratum quod ex A D cum Quadrato quod ex B D, duplum eſſe ad vtrumque, & quod ex A C & quod ex C D fit Quadratum.

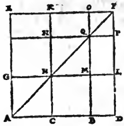
Ex tota A D deſcribo Quadratum A D E F. Et ſuper dimidia A C deſcribo Quadratum A C G H: protraɛtiſq; G H & C H ad ſeɛtiones duorum laterum E F & D F, deſcribo H L K F: quod erit Quadratum ipſius C D: vt conſtat duɛta Diametro A H F, ex Conſeɛtario quartæ hujus & ex trigeſimaquarta Primi: eſt enim K F æquale C D. Faɛtis etiam H M & H N vtrique A C & C B æqualibus, protraho M O & N P, ſeſe ſcindentes ad reɛtos angulos in punɛto Q. Quarum vtraque ſecet latera Quadrati A D E F in O & P punɛtis.

Iam verò nihil attinet probare H Q eſſe Quadratum ipſius A C, quum ſit Quadratum C B: ſicut Q F Quadratum ipſius B D: neque H P Parallelogrammum, æquale eſſe vtrique Supplementorum E H & H D: quum H O ſit eis communiter æquale:



Denique N O & Q L Supplementa eſſe æqualia. Atque etiam manifeſta ſunt hæc ex ipſa Figuræ ſpecie: propterea quòd omnes anguli qui circa Diametrum, ſunt ſemireɛti & latera æqualia. Diligenter itaque aduertentes quibus partibus componatur Quadratum H F, quod eſt ex C D: ſic ratiocinabimur. Quum totum D E Quadratum integretur duobus A H & H F Quadratis & duobus

Supplementis E H & H D: probandũ nobis eſt, hæc ipſa Supplementa cum quadrato Q F (quod eſt ex B D) eſſe æqualia duobus ipſis A H & H F Quadratis. Tum enim probauerimus hæc duo



Quadrata A H & H F bis ſumpta, toti Quadrato D E cum Quadrato Q F eſſe æqualia, quod initio ſuſcepimus. Sic autem erit Demonſtratio.

Supplementum E H æquale eſt Parallelogrammo H P: Et Quadratum A H cum Supplemento minori N O, æquum eſt alteri Supplemento H D, per primam animi Notionem, toties ſumptam quoties opus fuerit. Duo igitur Supplementa E H & H D, ſunt æqualia Quadrato A H & Gnomoni K H L Q. Si ergo ad vtrumque accedat Quadratum Q F: erunt duo Supplementa E H & H D cum Quadrato Q F, æqualia Quadrato A H, Gnomoni K H L Q, & Quadrato Q F. Sed hæc tria conſtituunt duo Quadrata A H & H F. Sunt igitur duo Supplementa E H & H D cum Quadrato Q F, æqualia duobus Quadratis A H & H F: Quod erat ſecundarium. Quare duo Quadrata A H & H F bis ſumpta, toti Quadrato D E cum Quadrato Q F ſunt æqualia: Quod erat probandum.

HÆc Demonſtratio longiorem quidem habet deductionem, ſed nihilominus acutam: Quam nos ex Figura Gnomonica venati ſumus: Ex qua hujuſce libri Secundi, immò totius ferè Geometriæ Demonſtrationes inſigniores hauriuntur.

PROBLEMA 1, PROPOSITIO XI.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Datam rectam lineam ſic ſecare, vt quod ex tota & altero ſegmentorum fit Rectangulum, æquale ſit ei quod ex altero ſegmento fit Quadrato.

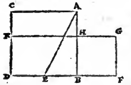
Sit linea A B ſic diuidenda, vt ex tota in vnum ſegmentorum fiet Rectangulum, æquale ſit ei quod ex altero ſegmento fiet

Quad

Quadrato.

Deſcribo ex A B, Quadratum A B C D. Cujus latus B D diuido per æqualia in E: & connecto A E: Et protraho E B ad F punctum, vt ſit E F æqualis A E: Et ex B F, portione exteriori, deſcribo Quadratum B F G H: vt B H latus reſectum ſit ex A B. Dico A B ſic ſectam eſſe in puncto H, vt quod fit ex A B in A H, æquale ſit quadrato quod ex H B.

Protraho G H ad K, punctum lateris C D, æqualem & æquidiſtantem A C: Eritq; H C Rectangulum ex A H in A B: quod probabitur æquale B F G H Quadrato.



Quoniam enim linea B D diuiſa eſt per æqualia in E, atque eidem addita linea B F: erit, per ſextam hujus, quod fit ex D F in B F cum Quadrato E B, æquale quadrato E F: quapropter & Quadrato E A: ob idq;, per quadrageſimamſeptimam Primi, quadratis A B & E B. Ablato igitur vtrimque quadrato E B, erit quod fit ex D F in B F (quod eſt Parallelogrammum F K) æquale quadrato lineæ A B. Dempto igitur vtrimque Parallelogrammo B K ſupererit quadratum B G æquale Parallelogrammo H C: Quod fuit demonſtrandum.

OBSERVABIMUS, hoc Problema nequaquam, vt cæteras hujus Secundi Libri Propoſitiones, ad Numeros reduci poſſe. Quum enim poſuerimus latus D B (id eſt A B) atque in duo æqualia diuiſerimus, vt in E puncto: linea A E ſuperueniens rationem conturbat: hoc eſt, nullam habet rationem ad latus A B nominatam: ob idq; per Numeros minimè explicabilem. Nam quum quadratum ipſius A E ſit æquale duobus quadratis A B & E B, per quadrageſimamprimam Primi: & E B ſit dimidium A B: erit ipſum A E irrationale. Vt enim duo Quadrati Numeri æquales quadratum Numerum juncti efficere non poſſunt: ita nec duo quadrati Numeri quadratum Numerum efficient, quorum alter ſit quadratum dimidiæ radicis alterius.

Id nos exemplo notum faciemus. Quadra 8, fiunt 64: hæc geminata nunquàm quadratum Numerum conſtituent. Ita, diuidantur 8 in duo æqualia fient 4. Certè quadrata duorum 8 & 4, quæ ſunt 64 & 16, quadratum Numerum efficere

non

non poſſunt : faciunt enim 80. Hoc verò eſſet neceſſarium, vt hoc Problema in Numeris locum haberet. At verò per Numeros Irrationales figurabitur in hunc modum.

Sint 8 ſic diuidenda, vt quod ex toto in alteram fiet partiũ, æquale ſit ei quod ex reliqua parte fiet quadrato.

Duco 8 in ſe, fiunt 64, hoc eſt, quadratum A B C D. Diuido 8 in duo æqualia, fiunt 4, vt D E aut E B linea. Duco 4 in ſe, fiunt 16 : hæc addo ad 64, proueniunt 80 : quorum radix eſt Rq 80. Ea eſt linea A E ſeu E F, per quadrageſimamſeptimam Primi. Quum itaque E F ſit Rq 80, & E B ſit 4: erit B F, Rq 80 m̃ 4. Ac tanta erit B H. Sed A H erit 8 m̃ Rq 80 m̃ 4 : hoc eſt, 12 m̃ Rq 80. Iam 12 m̃ Rq 80. ducta in 8, tantumdem efficiunt quantum Rq 80 m̃ 4 in ſe ducta, ſicut vult hæc vndecima. Hæc verò in ſecundo noſtræ Algebræ volumine abundè explicauimus: quam nos propediem, Deo juuante, latinam faciemus.

Atque has omnes Secundi Libri Propoſitiones Campanus Numeris accommodat, ſub Decimamſextam Noni. hanc tamen vndecimam omninò à Numeris excludit. Neque interim de Irrationalibus verbum vllum facit.

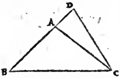
THEOREMA 11, PROPOSITIO XII.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

In Amblygoniis Triangulis, quod à latere obtuſum angulum ſubtendente fit Quadratum, tanto majus eſt duorum reliquorum Quadratis, quantum eſt id quod continetur bis ſub vno horum, & eo quod ipſi adjungitur in quod perpendicularis cadit, augmento.

Sit Triangulum A B C, cujus angulus A obtuſus. Et protracto latere B A interminatè ducatur, per duodecimam Primi à puncto C ad protractam, perpendicularis C D : vt ſit A D augmentum lateris B A. Dico Quadratum lateris B C, tanto majus

jus eſſe Quadratis duorum B A & A C laterum, quantum eſt id quod bis continetur ſub B A & A D, Rectangulum: ſcilicet, quadratum B C æquale eſſe quadratis B A & A C cum eo quod bis fit ex B A in A D.



Eſt enim, per quartam hujus, quadratum B D æquale Quadratis duorum B A & A D & ei quod bis ſub ipſis B A & A D continetur, Rectangulo. Et quia quadratum B C, per quadrageſimamſeptimam Primi, eſt æquale duobus B D & C D: erit idem B C Quadratum æquale tribus quadratis B A, A D, & D C & ei quod bis ſub B A & A D continetur Rectangulo. At, per eandem, Quadratum A C, æquale eſt quadratis A D & D C. Eſt igitur quadratum B C æquale Quadratis B A & A C & ei, quod bis ſub B A & A D comprehenditur, Rectangulo: Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XIII.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

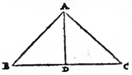
In Triangulis, quod ex latere alterum acutorum angulorum ſubtendente fit Quadratum, tanto minus eſt duorum reliquorum laterum Quadratis, quantum eſt id quod bis continetur ſub illo in quod perpendicularis introrſum cadit & ea ipſius parte quæ perpendiculari anguloq; acuto interjacet.

Quod Euclides de Triangulis Oxygoniis propoſuit, nos cum Campano ad omnia Triangula ampliauimus. Triangula enim omnia duos, minimùm, habent acutos angulos.

Si itaque fuerit Oxygonium, à quolibet angulorum demittatur perpendicularis: Si verò Orthogonium aut Amblygonium, demittenda erit ab angulo recto aut ab obtuſo: in id latus ſcilicet quod duobus acutis angulis interjacet: quæ o-

mninò intra Triangulum cadet, vt demonſtrauimus ad vigeſimam Primi. Ac tum hujus Theorematis Demonſtratio tres Triangulorum ſpecies generatim complectetur.

Sit igitur Triangulum A B C, cujus duo anguli B & C acuti, quantuſcumque ſit angulus A. Ab angulo A, demitto perpendicularem A D in latus B C. Dico Quadratum lateris A B, tanto minus eſſe Quadratis duorum laterum A C & B C, quantum eſt duplum ejus quod fit ex toto B C in partem D C. Vel etiam quadratum A C, tanto minus eſſe quadratis duorum A B & B C, quantum eſt duplum ejus quod fit ex C B in B D.



Quadratum enim A C, per quadrageſimamſeptimam Primi, æquale eſt duobus Quadratis A D & D C: Et Quadratum B C, per ſeptimam hujus, cum quadrato D C, æquale eſt quadrato B D cum eo quod bis fit ex B C in D C.

Tria igitur quadrata A C, B C, & D C, æqualia ſunt tribus quadratis A D, D C & B D cum eo quod bis fit ex B C in D C. Commune auferatur quadratum D C: Erunt duo quadrata A C & B C, æqualia duobus quadratis A D & B D cum eo quod bis fit ex B C in D C. At Quadratum A B æquale eſt duobus quadratis A D & B D. Quare idipſum A B quadratum tanto minus erit duobus A C & B C, quantum eſt duplum ejus quod fit ex B C in D C: Quod erat probandum.

Hæc Demonſtratio, quam ab illa communi aliquantùm variauimus, directa eſt. Æſtimatio enim vtraque ponitur: vt à majori auferatur minus.

Simili argumentandi ratione, probabitur Quadratum lateris A C, tanto minus eſſe quadratis duorum A B & B C, quantum eſt duplum ejus, quod fit ex C B in D B, Rectanguli.

PROBLEMA 2. PROPOSITIO XIIII.

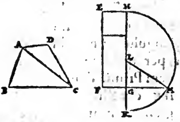
Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Dato Rectilineo æquale Quadratum deſcribere.

m Rectilineum A B C D, cui æquale Quadratum de-
n ſit. Conſtituo Parallelogrammum Rectangulum

E F G H,

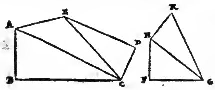
EFGH, æquale ipſi ABCD Rectilineo, per quadrageſimam-quintam Primi. Cujus ſi latera fuerint æqualia, id ipſum erit quale voluimus. Sin minus, continuabo vnum laterum ipſius, vt HG, ad punctum K: & ponam GK æqualem lateri FG. Diuidam poſtmodùm totam HK bifariam, in puncto L. Atque in ipſo L poſito Centro, deſcribam ſuper lineam HK, Semicirculum HMK: Et protraham FG latus, donec ſecet Semicirculum in puncto M. Dico Quadratum Lineæ GM eſſe æquale Rectilineo ABCD.



Connectam LM. Et quia linea HK diuiſa eſt æqualiter in L, & inæqualiter in G: erit, per quintam hujus, quod fit ex HG in GK cum quadrato GL, æquale Quadrato LK: ob id, quadrato LM: quapropter & duobus Quadratis LG & GM, per quadrageſimamſeptimam Primi. Dempto ergo vtrimque quadrato LG: erit quod fit ex HG in GK (id verò eſt Parallelogrammum EG) æquale Quadrato GM. Quare & Quadratum GM æquale Rectilineo ABCD: Quod faciendum fuit.

Hoc etiam loco addere placuit ex Campano, Compendium inueniendi lateris Tetragonici: ad eas Figuras, quas vocant Irregulares, æquandas.

Sit Figura quæpiam anormis, ABCD, quatuor laterum: Quæ in terna Triangula reſoluetur ABC, AEC & ECD.



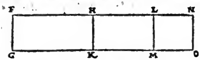
Hæc tria, ſecundùm doctrinam hujus, reduco ad tria Quadrata: quorum latera ſint, verbi gratia FG, FH, & HK. Tum ſtatuo FG & FH ad angulum rectum F: & connecto GH: ſuper quam erigo HK, itidem ad angulum rectum GHK: Et connecto GK. Et erit GK latus Tetragoni quæſiti: vt ſatis manifeſtum eſt ex Propoſitione illa quadrageſimaſeptima Primi.

In Figuris autem Regularibus, quæ in Triangula æqualia reſoluuntur, compendium multò promptius eſt. Expeditè enim ad vnum Parallelogrammum Rectangulum reducuntur, &

O 2 inde

inde ad Quadratum.

ALITER. Conuertantur ſingulatim Triangula in Parallelogramma Rectangula, quæ vnum Parallelogrammum efficiant. Verbi gratia, reducatur Triangulum A B C ad Parallelogrammum F G H K Rectangulum, per quadrageſimamſecundam Primi. Tum ſuper linea H K conſtituatur Parallelogrammum itidem Rectangulum H K L M, æquale Triãgulo A C E, per quadrageſimamquartam ejuſdem. Demùm, per eandẽ, ſuper linea L M conſtituatur Parallelogrãmum L M N O, æquale Triangulo C D E.



Eritq; F G N O vnum Parallelogrammum, per quadrageſimamquintam Primi: atque æquale toti Figuræ Rectilineæ A B C D E. Quod, per hanc vltimam, conuertes in Quadratum.

Libri ſecundi Geometricorum Elementorum finis.

✱

Digitized by Google

IACOBI PELETARII
CENOM. IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA
Demonſtrationum Liber tertius.

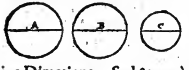
DEFINITIONES.

Ισοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι· ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν.

Æquales Circuli, ſunt quorum Diametri ſunt æquales: vel quorum quæ ex Centro lineæ, ſunt æquales.

Quum Circuli peripheria infinitatem præ ſe ferat, Circuli dimenſio à Peripheria non petitur, ſed à linea recta, nempe à Diametro.

Hæc verò Definitio ex ſe clara eſt. Nam quum Diametri per Circulorum Centra educantur, & dimidium orbium ſemper ſubtendant: ſi ſint ipſæ æquales, ab iiſdem quoque dimidia æqualia ſubtendi par eſt. Quorum verò dimidia ſunt æqualia, ea inter ſe ſunt æqualia.



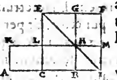
Vt, Æquales quidem ſunt A & B Circuli, ob æqualitatem Diametrorum: majores autem C Circulo: quum minor ſit hujus Dimetiens. Sed & æquè ſignificans eſt & manifeſta altera pars Definitionis, vel ex ea, quam in Principiis Libri Primi poſuimus, Circuli Definitione.

Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ ἐκβαλλομένη, οὐ τέμνει τὸν κύκλον.

ſita in eam quæ addita eſt, cum Quadrato quod fit à dimidia, æquum eſt ei quod à dimidia cum addita tanquàm ab vna, fit Quadrato.

Sit linea A B æqualiter diuiſa in puncto C: eiq; addita B D. Dico id quod fit ex compoſita A D in additam B D cum Quadrato dimidiæ C B, eſſe æquale Quadrato C D.

Deſcribam ex C D, Quadratum C D E F, cujus ſit Diameter B D. Et ducam B G æqualem & æquidiſtantẽ D F, quæ ſecet Diametrum in puncto H. Et per ipſum H punctum, ducam K M æqualem & æquidiſtantem A D, ſecantem D F in puncto M, & C E in puncto L: Et connectam A K æquidiſtantem C L.



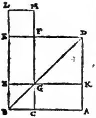
Iam per Conſectarium quartæ hujus, vtrumque Parallelogrammum L G & B M eſt quadratum: hoc quidem ex B D, illud verò ex C B: & proptereà D M æqualis B D: totumq; A M Parallelogrammum, eſt quod fit ex A D in B D. Quia ergo, per trigeſimamſextam Primi, A L eſt æquale C H: &, per quadrageſimamtertiam ejuſdem, Supplementum C H æquale Supplemento H F: erit & A L eidem H F æquale. Quare Gnomon C D G H, toti A M Parallelogrammo æqualis. Sed Gnomon C D G H cum quadrato L G, conſtituit quadratum lineæ C D. Quare A M Parallelogrammum cum quadrato L G, æquale eſt quadrato lineæ C D: quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 7, PROPOSITIO VII.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀφ᾽ ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Si recta linea ſecetur in duas quantaſcumq; partes: Quadratum quod à tota cum Quadrato quod ab vna partium, æquale eſt ei quod bis producitur ex tota in ipſam partem Rectangulo, cum eo quod ex altera parte fit Quadrato.

Sit



Sit linea A B, fortuitò diuiſa in puncto C. Dico quadratum totius A B cum quadrato B C, æquale eſſe ei quod bis fit ex A B in B C cum quadrato A C.

Deſcribatur quadratum totius A B, quod ſit A B D E, cujus Diameter B D: ducaturq; C F æqualis & æquidiſtans B E, ſecans Diametrum in puncto G: & per G punctum, H K æqualis & æquidiſtans A B.

Quia igitur Quadratum A E cum Quadrato C H, eſt æquale Quadrato K F cum duobus Parallelogrammis A H & C E: patet Propoſitio.

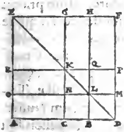
Si quis manifeſtiùs perſpicere velit, faciat H M Parallelogrammum æquale H A Parallelogrammo, vt E M ſit Quadratum B C. Ac tum omnes apparebunt Propoſitionis particulæ.

THEOREMA 8. PROPOSITIO VIII.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

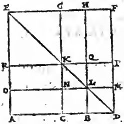
Si recta linea ſecetur vtcunque: Rectangulum comprehenſum quater ſub tota & vno ſegmentorum cum eo quod ex altero ſegmento fit Quadrato, æquale eſt ei quod à tota cum priori ſegmento tanquam ab vna deſcribitur, Quadrato.

Recta linea A B ſecetur vtcunque in puncto C. Dico id quod quater ſub A B & C B continetur Rectangulum vnà cum Quadrato quod ex A C, æquale eſſe ei quod ex A B & B C tanquam ex vnica linea, Quadrato.



Producatur A B in D punctum, & ſit B D æqualis C B: Et ex A D deſcribatur quadratum A D E F. Tum ducta Diametro D E, lineiſq; C G & B H parallelis & æqualibus ipſi D F, quæ ſecent Diametrum in punctis K & L: & per ipſa K & L puncta, ductis M O & P R paralleiis & æqualibus ipſi D A:

N Erit,



Erit,per Conſectarium quartæ hujus,vnaquæq; Superficierum R G, N Q, B M, & C P, quadrata. Quumq; B D & B L latera Quadrati B M, ſint æqualia C B & B L lateribus Parallelogrammi C L: erit & ipſum C L Quadratum: ſimiliq; ratione L P Quadratum: ob idq; quatuor Quadrata componentia C P Quadratum, inter ſe æqualia. Et quia totus Gnomon A D G K, circumſtans Quadratum R G, eſt, per trigeſimamſextam, & quadrageſimamtertiam Primi, quadruplus ei quod ex A B in B D fit Rectangulo, quia quadruplus ad Superficiem A L: conſtat Propoſitio: Scilicet A L ſumptum quater cum Quadrato R G, eſſe Quadrato A D B F æquale.

De Gnomone autem euidentiùs perſpiciemus, ſi aduertetimus Superficiem mutilam A D K R, eſſe duplam ad ſuperficiem A L. Duo enim Triangula K N L & L B D, ſunt æqualia Quadrato C L. Idemq; de altera parte D F G K ſit judicium. Quod nos ſi prolixiùs exponeremus, ingenium ſtudioſorum obrueremus potiùs quàm inſtrueremus. Eæ enim figurationes Gnomonum ejuſmodi ſunt, vt ſeſe ob concinnitatem ſponte elucident.

Campanus hoc Theorema proponit in hæc verba,

Si linea in duas partes ſecetur, atque ad ipſam addatur recta linea vni ſegmentorum æqualis: quod ex tota compoſita in ſeipſam fiet, æquale erit ijs quæ ex ductu prioris lineæ in ipſam additam quater, & ei quod ex altero ſegmento fit Quadrato.

Id verò in idem recidit cum priore. Eſt enim B D ipſi C D perpetuò æqualis. Sed tamen ejuſmodi varietates inutiles non ſunt: quippe quæ ingenium ad horum Theorematum praxin & vſum inſtructius reddant. Neque incommodè fecerit qui ſe in Propoſitionibus Geometricis, hujus præſertim Secundi libri, variandis, immò & nouis excogitandis exercuerit. Cujuſmodi ſatis multas adſcribere poſſemus. Sed eæ priuatim à Geometra ſunt examinandæ, non inter reliquas collocandæ. Tædioſum eſt enim hæc Theoremata congerere quæ cum Numeris communicant. Eamq; ob cauſam, nec ſine judicio paucis fuit

cont

contentus Euclides.

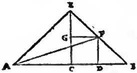
THEOREMA 9. PROPOSITIO IX.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Si recta linea in duo æqualia duoq; inæqualia diuidatur: quæ ab inæqualibus totius ſegmentis fiunt Quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia cum eo quod à medio ſegmentorum fit Quadrato.

Sit linea A B diuiſa æqualiter in puncto C, & inæqualiter in D. Dico duo Quadrata quæ ex A D & D B, dupla eſſe duorum quæ ex A C & C D, Quadratorum.

Super punctum C erigo perpendicularem C E, æqualem vtrique A C & C B: Et connecto E A & E B. Eruntq;, per quintam & trigeſimamſecundam Primi, duo anguli A & B ſemirecti: & vterque qui ad E, ſemirectus: ſicq; totus E rectus. Erigo itaque D F perpendicularem ſuper A B, ſecantem E B in puncto F. Et erit, per eandem trigeſimamſecundam, angulus B F D ſemirectus: quapropter D B & D F latera, per ſextam Primi, æqualia. Iam à puncto F duco F G æquidiſtantem, ob idq; æqualem C D. Et erit, per ſecundam partem vigeſimænonæ, & per trigeſimamſecundam Primi, vterque angulus qui ad G, rectus, & angulus



E F G ſemirectus: eſt enim F E G ſemirectus. Quapropter E G & F G, latera, per ſextam Primi, æqualia. Tandem connecto A F. Et quoniam Quadratum E F, per quadrageſimamſeptimam Primi, æquale eſt Quadratis duarum E G & G F: ipſum erit duplum ad Quadratum G F: ob idq; ad Quadratum C D. Eadem ratione erit Quadratum E A duplum ad Quadratũ A C. Quúmque Quadratum A F ſit æquale Quadratis A E & E F, per eandem: ipſum erit duplum ad Quadrata A C & C D. Sed & idem Quadratum A F æquale eſt Quadratis A D & D F. Et Quadrata igitur A D & D F dupla ſunt ad Quadrata A C & C D. Et quia Quadratum D B eſt æquale Quadrato D F: erunt duo Quadra-

ta A D & D B, dupla ad duo A C & C D: Quod erat demonſtrandum.

IN HAC contueri licet quantam vim habeant Rectum & Æquale. Quatuor enim Triangulis Iſoſcelibus Rectangulis, id eſt, quatuor Semiquadratis, tota nititur probatio.

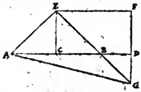
THEOREMA 10, PROPOSITIO X.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Si recta linea ſecetur in duo æqualia, apponatur autem ei alia in continuum: quod ex tota iam compoſita, quodq; ex appoſita ambo fiunt Quadrata, dupla ſunt amborum, eius ſcilicet quod ex dimidia, eiuſq; quod ex dimidia cum appoſita, Quadratorum.

Sit recta linea A B æqualiter diuiſa in puncto C: eiq; in continuum appoſita B D. Dico id quod fit ex A D Quadratum cum Quadrato quod ex B D, duplum eſſe ejus quod ex A C cum eo quod ex C D Quadrato.

Erigo C E perpendicularem ſuper A B, & æqualem vtrique linearum A C & C B: Et connecto A E & E B. Eritq;, per quintam & trigeſimamſecundam Primi, vterque angulus A & B: item vterque qui ad E, ſemirectus: totuſq; E rectus.



A puncto itaque E, duco E F æqualem & æquidiſtantem C D: & connecto F D, quam protraho donec concurrat cum linea E B protracta, ad punctum G: Tum connecto A G.

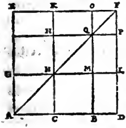
Et quia angulus E C D eſt rectus: erit, per vltimam partē vigeſimænonæ Primi, angulus C E F rectus. Quum igitur angulus C E B ſit ſemirectus: erit & F E G ſemirectus. Quumq; F D, per trigeſimamtertiam Primi, ſit æquidiſtans E C: erit, per trigeſimamquartam ejuſdem, angulus qui ad F, rectus: ſicq; angulus E G F, per trigeſimamſecundam, ſemirect

mirectus: quia F E G ſemirectus. Et per eandem angulus D B G ſemirectus: quum angulus B D G, per decimamtertiam ejuſdem, ſit rectus. Duo igitur latera E F & F G, per ſextam ejuſdem, ſunt æqualia: itidemq; duo B D & D G æqualia. Quapropter Quadratum E G, per quadrageſimamſeptimam Primi, duplum eſt ad Quadratum E F: ob id, & ad Quadratum C D. Quadratum item A E, per eandem, duplum eſt ad Quadratum A C. Quumq; Quadratum A G, per eandem, ſit æquale duobus Quadratis A E & E G, ſimiliter & duobus Quadratis A D & D G: ſitq; Quadratum D G æquale quadrato B D: erunt duo quadrata A D & D G (ea ſunt A D & B D) dupla duobus Quadratis A C & C D: Quod fuit demonſtrandum.

ALITER. Sit linea A B, bifariam diuiſa in C, eiq; in continuum adjuncta B D. Dico Quadratum quod ex A D cum Quadrato quod ex B D, duplum eſſe ad vtrumque, & quod ex A C & quod ex C D fit Quadratum.

Ex tota A D deſcribo Quadratum A D E F. Et ſuper dimidia A C deſcribo Quadratum A C G H: protractisq; G H & C H ad ſectiones duorum laterum E F & D F, deſcribo H L K F: quod erit Quadratum ipſius C D: vt conſtat ducta Diametro A H F, ex Conſectario quartæ hujus & ex trigeſimaquarta Primi: eſt enim K F æquale C D. Factis etiam H M & H N vtrique A C & C B æqualibus, protraho M O & N P, ſeſe ſcindentes ad rectos angulos in puncto Q. Quarum vtraque ſecet latera Quadrati A D E F in O & P punctis.

Iam verò nihil attinet probare H Q eſſe Quadratum ipſius A C, quum ſit Quadratum C B: ſicut Q F Quadratum ipſius B D: neque H P Parallelogrammum, æquale eſſe vtrique Supplementorum E H & H D: quum H O ſit eis communiter æquale: Denique N O & Q L Supplementa eſſe æqualia. Atque etiam manifeſta ſunt hæc ex ipſa Figuræ ſpecie: propterea quòd omnes anguli qui circa Diametrum, ſunt ſemirecti & latera æqualia. Diligenter itaque aduertentes quibus partibus componatur Quadratum H F, quod eſt ex C D: ſic ratiocinabimur. Quum totum D E

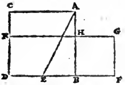


Quadratum integretur duobus A H & H F Quadratis & duobus

Quadrato.

Deſcribo ex A B, Quadratum A B C D. Cujus latus B D diuido per æqualia in E: & connecto A E: Et protraho E B ad F punctum, vt ſit B F æqualis A E: Et ex B F, portione exteriori, deſcribo Quadratum B F G H: vt B H latus reſectum ſit ex A B. Dico A B ſic ſectam eſſe in puncto H, vt quod fit ex A B in A H, æquale ſit quadrato quod ex H B.

Protraho G H ad K, punctum lateris C D, æqualem & æquidiſtantem A C: Eritq; H C Rectangulum ex A H in A B: quod probabitur æquale B F G H Quadrato.



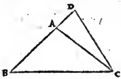
Quoniam enim linea B D diuiſa eſt per æqualia in E, atque eidem addita linea B F: erit, per ſextam hujus, quod fit ex D F in B F cum Quadrato E B, æquale quadrato E F: quapropter & Quadrato E A: ob idq;, per quadrageſimamſeptimam Primi, quadratis A B & E B. Ablato igitur vtrimque quadrato E B, erit quod fit ex D F in B F (quod eſt Parallelogrammum F K) æquale quadrato lineæ A B. Dempto igitur vtrimque Parallelogrammo B K ſupererit quadratum B G æquale Parallelogrammo H C: Quod fuit demonſtrandum.

OBSERVABIMUS, hoc Problema nequaquam, vt cæteras hujus Secundi Libri Propoſitiones, ad Numeros reduci poſſe. Quum enim poſuerimus latus D B (id eſt A B) atque in duo æqualia diuiſerimus, vt in E puncto: linea A E ſuperueniens rationem conturbat: hoc eſt, nullam habet rationem ad latus A B nominatam: ob idq; per Numeros minimè explicabilem. Nam quum quadratum ipſius A E ſit æquale duobus quadratis A B & E B, per quadrageſimam primam Primi: & E B ſit dimidium A B: erit ipſum A E irrationale. Vt enim duo Quadrati Numeri æquales quadratum Numerum juncti efficere non poſſunt: ita nec duo quadrati Numeri quadratum Numerum efficient, quorum alter ſit quadratum dimidiæ radicis alterius.

Id nos exemplo notum faciemus. Quadra 8, fiunt 64: hæc geminata nunquàm quadratum Numerum conſtituent. Ita, diuidantur 8 in duo æqualia fient 4. Certè quadrata duorum 8 & 4, quæ ſunt 64 & 16, quadratum Numerum efficere

non

jus eſſe Quadratis duorum B A & A C laterum, quantum eſt id quod bis continetur ſub B A & A D, Rectangulum: ſcilicet, quadratum B C æquale eſſe quadratis B A & A C cum eo quod bis fit ex B A in A D.



Eſt enim, per quartam hujus, quadratum B D æquale Quadratis duorum B A & A D & ei quod bis ſub ipſis B A & A D continetur, Rectangulo. Et quia quadratum B C, per quadrageſimamſeptimam Primi, eſt æquale duobus B D & C D: erit idem B C Quadratum æquale tribus quadratis B A, A D, & D C & ei quod bis ſub B A & A D continetur Rectangulo. At per eandem, Quadratum A C, æquale eſt quadratis A D & D C. Eſt igitur quadratum B C æquale Quadratis B A & A C & ei, quod bis ſub B A & A D comprehenditur, Rectangulo: Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XIII.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

In Triangulis, quod ex latere alterum acutorum angulorum ſubtendente fit Quadratum, tanto minus eſt duorum reliquorum laterum Quadratis, quantum eſt id quod bis continetur ſub illo in quod perpendicularis introrſum cadit & ea ipſius parte quæ perpendiculari anguloq; acuto interjacet.

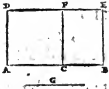
Quod Euclides de Triangulis Oxygoniis propoſuit, nos cum Campano ad omnia Triangula ampliauimus. Triangula enim omnia duos, minimùm, habent acutos angulos.

Si itaque fuerit Oxygonium, à quolibet angulorum demittatur perpendicularis: Si verò Orthogonium aut Amblygonium, demittenda erit ab angulo recto aut ab obtuſo: in id latus ſcilicet quod duobus acutis angulis interjacet: quæ o-

gulum, æquale eſt ei quod ex ſegmentis fit rectangulo, eiq; quod ex priori ſegmento fit Quadrato.

Sit linea A B diuiſa in A C & C B ſegmenta. Dico Rectangulum ex tota A B in A C ſegmentum, æquale eſſe Rectangulo quod ex A C in C B, eiq; quod ex A C in ſeipſum ſimul ſumptis.

Deſcribatur ex A C, Quadratum A C D F: Et productâ D F ad E punctum, connexaq; B E parallelo, perficiatur Parallelogrammum A B D E. Quod quum conſtet ipſo Quadrato A C D F, & Parallelogrammo F B, quod eſt ex C B in A C: manifeſta eſt Propoſitio.



A L I T E R, ex prima hujus. Sumatur G æqualis A C. Et quoniam totum B D Parallelogrammum fit ex G in A B, quum ſint A D & G æquales: & C D Quadratum ex eadem G in A C ſegmenta (lineæ enim æquales ſunt) & denique F B Parallelogrammum, ex eadem G in C B ſegmentum: atque his æquale eſt quod fit ex G in A B, per primam hujus: erit quod fit ex A C in A B æquale ei quod fit ex A C in B C, & in ſeipſum: Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 4, PROPOSITIO IIII.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἔσται τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Si recta linea ſecetur vtcumque: Quadrata quæ fiunt ex ſegmentis cum eo quod bis ſub ipſis ſegmentis comprehenditur Rectangulo, æqualia ſunt ei quod à tota fit Quadrato.

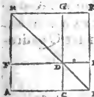
Conſectarium.

Quæ circa Dimetientem Quadrati conſiſtunt Parallelogramma, Quadrata eſſe oportet.

Sit recta linea A B, ſecta in partes A C & C B. Dico duo quadrata ex A C & C B, cum eo quod bis ſub iiſdem A C & C B continetur Rectangulo, eſſe æqualia quadrato totius A B.

Ex

Ex altera partium, vt ex C B, deſcribo Quadratum C B D E: & productis lateribus E D & C D, ponam D F & D G æqualia ipſi A C, & perficiam Quadratum D F G H: Quod conſtat eſſe Quadratum ipſius A C. Tum connexâ F A, erit C F Parallelogrammum Rectangulum, per trigeſimamtertiam & trigeſimamquartam Primi, Quod eſt ex C B in A C: quum C D ſit ipſi C B æqualis. Similiter conſtituo alterum Parallelogrammum Rectangulum D K, productis B E & H G, quæ concurrant ad punctum K: quod eadem ratione fit ex C B in A C. Quoniam ergo duo anguli D F H & D F A ſunt recti: erit per decimamquartam primi, A H linea vna: & eadem ratione H K linea vna, & B K etiã vna. Et quia G K ipſi C B eſt æqualis: & A F eidem C B, quia æqualis ipſi E B: item H F & H G ipſi A C: erunt duæ A H & H K toti A B æquales, per ſecundam animi Notionem. Itidem & B K eidem A B æqualis. Quũ itaque quatuor anguli A, B, H, K ſint recti, erit A B H K Quadratum, & nonniſi ipſius A B, quum ſit vnum laterum. Quare, quum ipſum compleatur Quadratis duarũ A C & C B, duobusq; Supplementis quæ ſub C B & A C, comprehenduntur: conſtat Propoſitio.



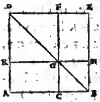
HANC Demonſtrationem, meo judicio, expeditiorem reddidi, quàm ſit ea quæ per Diametros & angulos ſemirectos aſtruitur verboſiùs. Nihil eſt enim quod magis oneret memoriam, quàm longè ducta Demonſtratio: in iis præſertim Propoſitionibus quas vel ipſa conſtructio manifeſtas reddit. Diametrum tamen appoſuimus: vt quouismodo conſtitutio innoteſceret. Scilicet deſcripto Quadrato B D, & ejus Diametro productâ, dum concurrat cum A F priùs erectâ, ad punctum H: tum perfectum A B H K Parallelogrammum probabitur eſſe Quadratum: & D F G H itidem Quadratum, per ſemirectos angulos Triangulorum. Quod ego ratiocinationi cujuſque relinquo.

ALITER. Sit linea A B, vt priùs, diuiſa in A C & C B. Eritq; per ſecundam hujus, quod fit ex tota A B in ſe, æquale ei quod fit ex ipſa in A C & C B. At ex ipſa in A C tantum fit, quantum ex A C in ſe & ex A C in B C, per tertiam hujus. Item ex ipſa A B tota in B C, tantum fit, quantum ex C B in ſe & ex C B in A C, per eandem.

dem. Quod igitur fit ex tota A B in ſe, æquum eſt iis quæ fiunt ex A C in ſe & in C B, & ex C B in ſe & in A C: Quod erat demonſtrandum.

Hæc ſecunda Demonſtratio eſt Campani. Sed, vt ipſe ſubijcit, ex ea non conſtat Conſectarium. Quod nos quum jam probauerimus ad quadrageſimamſextam Primi: hoc ipſum Theorema ſic facilè oſtendemus.

Ex ipſa A B, diuiſa in A C & C B vt priùs, conſtituatur Quadratum A B D E, cujus Diameter B D: ducatur Parallelus C F ſecans



Diametrum in puncto G: itemq; altera Parallelus H K per idem punctum G. Ac tum, ex Demonſtratione noſtra, erunt K E & C H Quadrata, eaq; ipſorum A C & C B: vt ſatis conſtat ex conſtructione. Præterea duo A G & G E: Supplementa, ſunt quæ fiunt ex A C in B C. Quare, quum hæc quatuor perficiant totum A B D E Quadratum: manifeſta eſt Propoſitio.

Hæc etiam proponi poteſt in hæc verba,

Si duæ lineæ inæquales fuerint: quod fit ex maiori in ſeipſam, æquum eſt ei quod ex minori in ſeipſam cum duobus, quæ fiunt ex exceſſu in maiorem & ex eodem in minorem, Parallelogrammis.

Scilicet A B linea excedat A C lineam, portione C B. Conſtabit Quadratum maioris A B, Quadrato minoris A C cum eo quod fit ex C B in A B (vt eſt in poſteriore Figura Parallelogrammum A H), & altero quod fit ex eodem C B in minorem A C, quod eſt G E Parallelogrammum.

In quo rerum imaginem jucundè contemplari ſubit. Nempè quod deeſt lineæ A C, ducetur in ipſam: hoc eſt, C B in A C: ſed & quod ſupereſt ipſi A B (id ipſum verò eſt C B) ducetur in ipſam A B: ſicq; ex duabus vna fiet potentia.

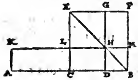
THEOREMA 5, PROPOSITIO V.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Si recta linea ſecetur in duo æqualia duoq; inæqual

qualia:Rectangulum comprehenſum ſub inæqualibus ſegmentis totius vnà cum Quadrato quod à medio ſegmentorum, æquale eſt ei quod à dimidia fit Quadrato.

Sit recta linea A B æqualiter diuiſa in puncto C, & inæqualiter in puncto D. Dico Quadratum C B, eſſe æquale ei quod fit ex A D in D B cum Quadrato C D.



Deſcribam ex C B Quadratũ C B E F, cum Diametro B E:& ducam D G ipſi B F parallelum, ſecantem Diametrum in puncto H,& E F in puncto G. Et per punctum H ducam K M æqualem & æquidiſtantem A B, per trigeſimamprimam Primi, ſecantem B F in puncto M,& C E in puncto L. Et connectam A K æquidiſtantem C E. Eruntq;, per Conſectarium antecedentis, ſeu per ea quæ probauimus ad quadrageſimamſextam Primi, L G & D M Quadrata: L G quidem lineæ C D: & D M, lineæ D B. Et quia D H eſt æqualis D B: erit A H id quod fit ex ductu A D in D B. Et quia, per quadrageſimamtertiam Primi, duo Supplementa C H & H F ſunt æqualia: addito Parallelogrammo D M vtriq; erit C M æquale D F. Quum itaque A L ſit æquale C M, per trigeſimamſextam Primi:erit & ipſum æquale D F. Gnomon igitur C B G H æqualis eſt A H Parallelogrammo. Sed Gnomon ipſe cum Quadrato L G, conſtituit Quadratum dimidiæ A B. Quare A H Parallelogrammum & Quadratum L G, ſunt æqualia Quadrato dimidiæ A B: Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 6, PROPOSITIO VI.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

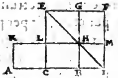
Si recta linea in duo æqualia ſecetur, alia verò ei linea addatur in continuum: quod ex tota iam compo-

ſita

ſita in eam quæ addita eſt, cum Quadrato quod fit à dimidia, æquum eſt ei quod à dimidia cum addita tanquàm ab vna, fit Quadrato.

Sit linea A B æqualiter diuiſa in puncto C: eiq; addita B D. Dico id quod fit ex compoſita A D in additam B D cum Quadrato dimidiæ C B, eſſe æquale Quadrato C D.

Deſcribam ex C D, Quadratum C D E F, cujus ſit Diameter B D. Et ducam B G æqualem & æquidiſtantẽ D F, quæ ſecet Diametrum in puncto H. Et per ipſum H punctum, ducam K M



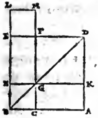
æqualem & æquidiſtantem A D, ſecantem D F in puncto M, & C E in puncto L: Et connectam A K æquidiſtantem C L. Iam per Conſectarium quartæ hujus, vtrumque Parallelogrammum L G & B M eſt quadratum: hoc quidem ex B D, illud verò ex C B: & proptereà D M æqualis B D: totumq́, A M Parallelogrammum, eſt quod fit ex A D in B D. Quia ergo, per trigeſimamſextam Primi, A L eſt æquale C H: &, per quadrageſimamtertiam ejuſdem, Supplementum C H æquale Supplemento H F: erit & A L eidem H F æquale. Quare Gnomon C D G H, toti A M Parallelogrammo æqualis. Sed Gnomon C D G H cum quadrato L G, conſtituit quadratum lineæ C D. Quare A M Parallelogrammum cum quadrato L G, æquale eſt quadrato lineæ C D: quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 7. PROPOSITIO VII.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Si recta linea ſecetur in duas quantaſcumq; partes: Quadratum quod à tota cum Quadrato quod ab vna partium, æquale eſt ei quod bis producitur ex tota in ipſam partem Rectangulo, cum eo quod ex altera parte fit Quadrato.

Sit



Sit linea A B, fortuitò diuiſa in puncto C. Dico quadratum totius A B cum quadrato B C, æquale eſſe ei quod bis fit ex A B in B C cum quadrato A C.

Deſcribatur quadratum totius A B, quod ſit A B D E, cujus Diameter B D: ducaturq; C F æqualis & æquidiſtans B E, ſecans Diametrum in puncto G: & per G punctum, H K æqualis & æquidiſtans A B.

Quia igitur Quadratum A E cum Quadrato C H, eſt æquale Quadrato K F cum duobus Parallelogrammis A H & C E: patet Propoſitio.

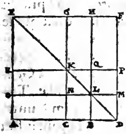
Si quis manifeſtiùs perſpicere velit, faciat H M Parallelogrammum æquale H A Parallelogrammo, vt E M ſit Quadratum B C. Ac tum omnes apparebunt Propoſitionis particulæ.

THEOREMA 8. PROPOSITIO VIII.

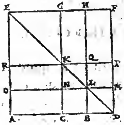
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Si recta linea ſecetur vtcunque: Rectangulum comprehenſum quater ſub tota & vno ſegmentorum cum eo quod ex altero ſegmento fit Quadrato, æquale eſt ei quod à tota cum priori ſegmento tanquam ab vna deſcribitur, Quadrato.

Recta linea A B ſecetur vtcunque in puncto C. Dico id quod quater ſub A B & C B continetur Rectangulum vnà cum Quadrato quod ex A C, æquale eſſe ei quod ex A B & B C tanquam ex vnica linea, Quadrato.



Producatur A B in D punctum, & ſit B D æqualis C B: Et ex A D deſcribatur quadratum A D E F. Tum ducta Diametro D E, lineiſq; C G & B H parallelis & æqualibus ipſi D F, quæ ſecent Diametrum in punctis K & L: & per ipſa K & L puncta, ductis M O & P R parallelis & æqualibus ipſi D A:



Erit, per Conſectarium quartæ hujus, vnaquæq; Superficierum R G, N Q, B M, & C P, quadrata. Quumq; B D & B L latera Quadrati B M, ſint æqualia C B & B L lateribus Parallelogrammi C L: erit & ipſum C L Quadratum: ſimiliq; ratione L P Quadratum: ob idq; quatuor Quadrata componentia C P Quadratum, inter ſe æqualia. Et quia totus Gnomon A D G K, circumſtans Quadratum R G, eſt, per trigeſimamſextam, & quadrageſimamtertiam Primi, quadruplus ei quod ex A B in B D fit Rectangulo, quia quadruplus ad Superficiem A L: conſtat Propoſitio: Scilicet A L ſumptum quater cum Quadrato R G, eſſe Quadrato A D B F æquale.

De Gnomone autem euidentiùs perſpiciemus, ſi aduerterimus Superficiem mutilam A D K R, eſſe duplam ad ſuperficiem A L. Duo enim Triangula K N L & L B D, ſunt æqualia Quadrato C L. Idemq; de altera parte D F G K ſit judicium. Quod nos ſi prolixiùs exponeremus, ingenium ſtudioſorum obrueremus potiùs quàm inſtrueremus. Eæ enim figurationes Gnomonum ejuſmodi ſunt, vt ſeſe ob concinnitatem ſponte elucident.

Campanus hoc Theorema proponit in hæc verba,

Si linea in duas partes ſecetur, atque ad ipſam addatur recta linea vni ſegmentorum æqualis: quod ex tota compoſita in ſeipſam fiet, æquale erit ijs quæ ex ductu prioris lineæ in ipſam additam quater, & ei quod ex altero ſegmento fit Quadrato.

Id verò in idem recidit cum priore. Eſt enim B D ipſi C D perpetuò æqualis. Sed tamen ejuſmodi varietates inutiles non ſunt: quippe quæ ingenium ad horum Theorematum praxin & vſum inſtructius reddant. Neque incommodè fecerit qui ſe in Propoſitionibus Geometricis, hujus præſertim Secundi libri, variandis, immò & nouis excogitandis exercuerit. Cujuſmodi ſatis multas adſcribere poſſemus. Sed eæ priuatim à Geometra ſunt examinandæ, non inter reliquas collocandæ. Tædioſum eſt enim hæc Theoremata congerere quæ cum Numeris communicant. Eamq; ob cauſam, nec ſine judicio paucis fuit

cont

contentus Euclides.

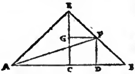
THEOREMA 9. PROPOSITIO IX.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Si recta linea in duo æqualia duoq́; inæqualia diuidatur: quæ ab inæqualibus totius ſegmentis fiunt Quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia cum eo quod à medio ſegmentorum fit Quadrato.

Sit linea A B diuiſa æqualiter in puncto C, & inæqualiter in D. Dico duo Quadrata quæ ex A D & D B, dupla eſſe duorum quæ ex A C & C D, Quadratorum.

Super punctum C erigo perpendicularem C E, æqualem vtrique A C & C B: Et connecto E A & E B. Eruntq́;, per quintam & trigeſimamſecundam Primi, duo anguli A & B ſemirecti: & vterque qui ad E, ſemirectus: ſicq́; totus E rectus. Erigo itaque D F perpendicularem ſuper A B, ſecantem E B in puncto F. Et erit, per eandem trigeſimamſecundam, angulus B F D ſemirectus: quapropter D B & D F latera, per ſextam Primi, æqualia. Iam à puncto F duco F G æquidiſtantem, ob idq́; æqualem C D. Et erit, per



ſecundam partem vigeſimænonæ, & per trigeſimamſecundam Primi, vterque angulus qui ad G, rectus, & angulus E F G ſemirectus: eſt enim F E G ſemirectus. Quapropter E G & F G, latera, per ſextam Primi, æqualia. Tandem connecto A F. Et quoniam Quadratum E F, per quadrageſimamſeptimam Primi, æquale eſt Quadratis duarum E G & G F: ipſum erit duplum ad Quadratum G F: ob idq́; ad Quadratum C D. Eadem ratione erit Quadratum E A duplum ad Quadratū A C. Quúmque Quadratum A F ſit æquale Quadratis A E & E F, per eandem: ipſum erit duplum ad Quadrata A C & C D. Sed & idem Quadratum A F æquale eſt Quadratis A D & D F. Et Quadrata igitur A D & D F dupla ſunt ad Quadrata A C & C D. Et quia Quadratum D B eſt æquale Quadrato D F: erunt duo Quadra-

ta A D & D B, dupla ad duo A C & C D: Quod erat demonſtrandum.

IN HAC contueri licet quantam vim habeant Rectum & Æquale. Quatuor enim Triangulis Iſoſcelibus Rectangulis, id eſt, quatuor Semiquadratis, tota nititur probatio.

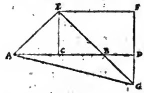
THEOREMA 10, PROPOSITIO X.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Si recta linea ſecetur in duo æqualia, apponatur autem ei alia in continuum: quod ex tota iam compoſita, quodq; ex appoſita ambo fiunt Quadrata, dupla ſunt amborum, eius ſcilicet quod ex dimidia, eiusq; quod ex dimidia cum appoſita, Quadratorum.

Sit recta linea A B æqualiter diuiſa in puncto C: eiq; in continuum appoſita B D. Dico id quod fit ex A D Quadratum cum Quadrato quod ex B D, duplum eſſe ejus quod ex A C cum eo quod ex C D Quadrato.

Erigo C E perpendicularem ſuper A B, & æqualem vtrique linearum A C & C B: Et connecto A E & E B. Eritq;, per quintam & trigeſimamſecundam Primi, vterque angulus A & B: item vterque qui ad E, ſemirectus: totusq; E rectus.



A puncto itaque E, duco E F æqualem & æquidiſtantem C D: & connecto F D, quam protraho donec concurrat cum linea E B protracta, ad punctum G: Tum connecto A G.

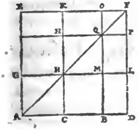
Et quia angulus E C D eſt rectus: erit, per vltimam partē vigeſimænonæ Primi, angulus C E F rectus. Quum igitur angulus C E B ſit ſemirectus: erit & F E G ſemirectus. Quumq; F D, per trigeſimamtertiam Primi, ſit æquidiſtans E C: erit, per trigeſimamquartam ejuſdem, angulus qui ad F, rectus: ſicq; angulus E G F, per trigeſimamſecundam, ſemirect-

mirectus: quia F E G ſemirectus. Et per eandem angulus D B G ſemirectus: quum angulus B D G, per decimamtertiam ejuſdem, ſit rectus. Duo igitur latera E F & F G, per ſextam ejuſdem, ſunt æqualia: itidemq; duo B D & D G æqualia. Quapropter Quadratum E G, per quadrageſimamſeptimam Primi, duplum eſt ad Quadratum E F: ob id, & ad Quadratum C D. Quadratum item A E, per eandem, duplum eſt ad Quadratum A C. Quumq; Quadratum A G, per eandem, ſit æquale duobus Quadratis A E & E G, ſimiliter & duobus Quadratis A D & D G: ſitq; Quadratum D G æquale quadrato B D: erunt duo quadrata A D & D G (ea ſunt A D & B D) dupla duobus Quadratis A C & C D: Quod fuit demonſtrandum.

ALITER. Sit linea A B, bifariam diuiſa in C, eiq; in continuum adjuncta B D. Dico Quadratum quod ex A D cum Quadrato quod ex B D, duplum eſſe ad vtrumque, & quod ex A C & quod ex C D ſit Quadratum.

Ex tota A D deſcribo Quadratum A D E F. Et ſuper dimidia A C deſcribo Quadratum A C G H: protractiſq; G H & C H ad ſectiones duorum laterum E F & D F, deſcribo H L K F: quod erit Quadratum ipſius C D: vt conſtat ducta Diametro A H F, ex Conſectario quartæ hujus & ex trigeſimaquarta Primi: eſt enim K F æquale C D. Factis etiam H M & H N vtrique A C & C B æqualibus, protraho M O & N P, ſeſe ſcindentes ad rectos angulos in puncto Q. Quarum vtraque ſecet latera Quadrati A D E F in O & P punctis.

Iam verò nihil attinet probare H Q eſſe Quadratum ipſius A C, quum ſit Quadratum C B: ſicut Q F Quadratum ipſius B D: neque H P Parallelogrammum, æquale eſſe vtrique Supplementorum E H & H D: quum H O ſit eis communiter æquale:

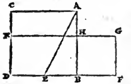


Denique N O & Q L Supplementa eſſe æqualia. Atque etiam manifeſta ſunt hæc ex ipſa Figuræ ſpecie: propterea quòd omnes anguli qui circa Diametrum, ſunt ſemirecti & latera æqualia. Diligenter itaque aduertentes quibus partibus componatur Quadratum H F, quod eſt ex C D: ſic ratiocinabimur. Quum totum D E Quadratum integretur duobus A H & H F Quadratis & duobus

Quadrato.

Deſcribo ex A B, Quadratum A B C D. Cujus latus B D diuido per æqualia in E: & connecto A E: Et protraho E B ad F punctum, vt ſit B F æqualis A E: Et ex B F, portione exteriori, deſcribo Quadratum B F G H: vt B H latus reſectum ſit ex A B. Dico A B ſic ſectam eſſe in puncto H, vt quod fit ex A B in A H, æquale ſit quadrato quod ex H B.

Protraho G H ad K, punctum lateris C D, æqualem & æquidiſtantem A C: Eritq; H C Rectangulum ex A H in A B: quod probabitur æquale B F G H Quadrato.

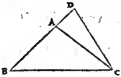


Quoniam enim linea B D diuiſa eſt per æqualia in E, atque eidem addita linea B F: erit, per ſextam hujus, quod fit ex D F in B F cum Quadrato E B, æquale quadrato E F: quapropter & Quadrato E A: ob idq;, per quadrageſimamſeptimam Primi, quadratis A B & E B. Ablato igitur vtrimque quadrato E B, erit quod fit ex D F in B F (quod eſt Parallelogrammum F K) æquale quadrato lineæ A B. Dempto igitur vtrimque Parallelogrammo B K ſupererit quadratum B G æquale Parallelogrammo H C: Quod fuit demonſtrandum.

OBSERVABIMVS, hoc Problema nequaquam, vt cæteras hujus Secundi Libri Propoſitiones, ad Numeros reduci poſſe. Quum enim poſuerimus latus D B (id eſt A B) atque in duo æqualia diuiſerimus, vt in E puncto: linea A E ſuperueniens rationem conturbat: hoc eſt, nullam habet rationem ad latus A B nominatam: ob idq; per Numeros minimè explicabilem. Nam quum quadratum ipſius A E ſit æquale duobus quadratis A B & E B, per quadrageſimamprimam Primi: & E B ſit dimidium A B: erit ipſum A E irrationale. Vt enim duo Quadrati Numeri æquales quadratum Numerum juncti efficere non poſſunt: ita nec duo quadrati Numeri quadratum Numerum efficient, quorum alter ſit quadratum dimidiæ radicis alterius.

Id nos exemplo notum faciemus. Quadra 8, fiunt 64: hæc geminata nunquàm quadratum Numerum conſtituent. Ita, diuidantur 8 in duo æqualia fient 4. Certè quadrata duorum 8 & 4, quæ ſunt 64 & 16, quadratum Numerum efficere non

jus eſſe Quadratis duorum B A & A C laterum, quantum eſt id quod bis continetur ſub B A & A D, Rectangulum: ſcilicet, quadratum B C æquale eſſe quadratis B A & A C cum eo quod bis fit ex B A in A D.



Eſt enim, per quartam hujus, quadratum B D æquale Quadratis duorum B A & A D & ei quod bis ſub ipſis B A & A D continetur, Rectangulo. Et quia quadratum B C, per quadrageſimamſeptimam Primi, eſt æquale duobus B D & C D: erit idem B C Quadratum æquale tribus quadratis B A, A D, & D C & ei quod bis ſub B A & A D continetur Rectangulo. At per eandem, Quadratum A C, æquale eſt quadratis A D & D C. Eſt igitur quadratum B C æquale Quadratis B A & A C & ei, quod bis ſub B A & A D comprehenditur, Rectangulo: Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XIII.

Εν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

In Triangulis, quod ex latere alterum acutorum angulorum ſubtendente fit Quadratum, tanto minus eſt duorum reliquorum laterum Quadratis, quantum eſt id quod bis continetur ſub illo in quod perpendicularis introrſum cadit & ea ipſius parte quæ perpendiculari anguloq; acuto interjacet.

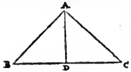
Quod Euclides de Triangulis Oxygoniis propoſuit, nos cum Campano ad omnia Triangula ampliauimus. Triangula enim omnia duos, minimùm, habent acutos angulos.

Si itaque fuerit Oxygonium, à quolibet angulorum demittatur perpendicularis: Si verò Orthogonium aut Amblygonium, demittenda erit ab angulo recto aut ab obtuſo: in id latus ſcilicet quod duobus acutis angulis interjacet: quæ o-

O mnin

mninò intra Triangulum cadet, vt demonſtrauimus ad vigeſimam Primi. Ac tum hujus Theorematis Demonſtratio tres Triangulorum ſpecies generatim complectetur.

Sit igitur Triangulum A B C, cujus duo anguli B & C acuti, quantuſcumque ſit angulus A. Ab angulo A, demitto perpendicularem A D in latus B C. Dico Quadratum lateris A B, tanto minus eſſe Quadratis duorum laterum A C & B C, quantum eſt duplum ejus quod fit ex toto B C in partem D C. Vel etiam quadratum A C, tanto minus eſſe quadratis duorum A B & B C, quantum eſt duplum ejus quod fit ex C B in B D.



Quadratum enim A C, per quadrageſimamſeptimam Primi, æquale eſt duobus Quadratis A D & D C: Et Quadratum B C, per ſeptimam hujus, cum quadrato D C, æquale eſt quadrato B D cum eo quod bis fit ex B C in D C.

Tria igitur quadrata A C, B C, & D C, æqualia ſunt tribus quadratis A D, D C & B D cum eo quod bis fit ex B C in D C. Commune auferatur quadratum D C: Erunt duo quadrata A C & B C, æqualia duobus quadratis A D & B D cum eo quod bis fit ex B C in D C. At Quadratum A B æquale eſt duobus quadratis A D & B D. Quare idipſum A B quadratum tanto minus erit duobus A C & B C, quantum eſt duplum ejus quod fit ex B C in D C: Quod erat probandum.

Hæc Demonſtratio, quam ab illa communi aliquantùm variauimus, directa eſt. Æſtimatio enim vtraque ponitur: vt à majori auferatur minus.

Similì argumentandi ratione, probabitur Quadratum lateris A C, tanto minus eſſe quadratis duorum A B & B C, quantum eſt duplum ejus, quod fit ex C B in D B, Rectanguli.

PROBLEMA 1, PROPOSITIO XIIII.

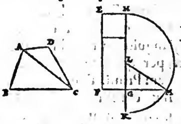
Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Dato Rectilineo æquale Quadratum deſcribere.

Sit datum Rectilineum A B C D, cui æquale Quadratum deſcribendum ſit. Conſtituo Parallelogrammum Rectangulum

E F G H,

E F G H, æquale ipſi A B C D Rectilineo, per quadrageſimam-

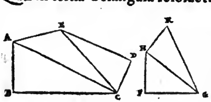


quintam Primi. Cujus ſi latera fuerint æqualia, id ipſum erit quale voluimus. Sin minus, continuabo vnum laterum ipſius, vt H G, ad punctum K: & ponam G K æqualem lateri F G. Diuidam poſtmodùm totam H K bifariam, in puncto L. Atque in ipſo L poſito Centro, deſcribam ſuper lineam H K, Semicirculum H M K: Et protraham F G latus donec ſecet Semicirculum in puncto M. Dico Quadratum Lineæ G M eſſe æquale Rectilineo A B C D.

Connectam L M. Et quia linea H K diuiſa eſt æqualiter in L, & inæqualiter in G: erit, per quintam hujus, quod fit ex H G in G K cum quadrato G L, æquale Quadrato L K: ob id, quadrato L M: quapropter & duobus Quadratis L G & G M, per quadrageſimamſeptimam Primi. Dempto ergo vtrimque quadrato L G: erit quod fit ex H G in G K (id verò eſt Parallelogrammum E G) æquale Quadrato G M. Quare & Quadratum G M æquale Rectilineo A B C D; Quod faciendum fuit.

Hoc etiam loco addere placuit ex Campano, Compendium inueniendi lateris Tetragonici: ad eas Figuras, quas vocant Irregulares, æquandas.

Sit Figura quæpiam anormis, A B C D, quatuor laterum: Quæ in terna Triangula reſoluetur A B C, A E C & E C D.

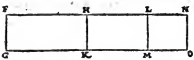


Hæc tria, ſecundùm doctrinam hujus, reduco ad tria Quadrata: quorum latera ſint, verbi gratia F G, F H, & H K. Tum ſtatuo F G & F H ad angulum rectum F: & connecto G H: ſuper quam erigo H K, itidem ad angulum rectum G H K: Et connecto G K. Et erit G K latus Tetragoni quæſiti: vt ſatis manifeſtum eſt ex Propoſitione illa quadrageſimaſeptima Primi.

In Figuris autem Regularibus, quæ in Triangula æqualia reſoluuntur, compendium multò promptius eſt. Expeditè enim ad vnum Parallelogrammum Rectangulum reducuntur, &

inde ad Quadratum.

ALITER. Conuertantur ſingulatim Triangula in Parallelogramma Rectangula, quæ vnum Parallelogrammum efficiant. Verbi gratia, reducatur Triangulum A B C ad Parallelogrammum F G H K Rectangulum, per quadrageſimamſecundam Primi. Tum ſuper linea H K conſtituatur Parallelogrammum itidem Rectangulum H K L M, æquale Triãgulo A C E, per quadrageſimamquartam ejuſdem. Deinùm, per eandē, ſuper linea L M conſtituatur Parallelogrãmum L M N O, æquale Triangulo C D E.



Eritq; F G N O vnum Parallelogrammum, per quadrageſimamquintam Primi: atque æquale toti Figuræ Rectilineæ A B C D E. Quod, per hanc vltimam, conuertes in Quadratum.

Libri ſecundi Geometricorum Elementorum finis.

✱

IACOBI PELETARII
CENOM. IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA
Demonſtrationum Liber tertius.

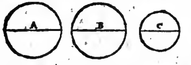
DEFINITIONES.

IΣοι κύκλοι εἰσίν, ὧν αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι· ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν.

Æquales Circuli, ſunt quorum Diametri ſunt æquales: vel quorum quæ ex Centro lineæ, ſunt æquales.

Quum Circuli peripheria infinitatem præ ſe ferat, Circuli dimenſio à Peripheria non petitur, ſed à linea recta, nempe à Diametro.

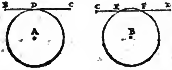
Hæc verò Definitio ex ſe clara eſt. Nam quum Diametri per Circulorum Centra educantur, & dimidium orbium ſemper ſubtendant: ſi ſint ipſæ æquales, ab iisdem quoque dimidia æqualia ſubtendi par eſt. Quorum verò dimidia ſunt æqualia, ea inter ſe ſunt æqualia.



Vt, Æquales quidem ſunt A & B Circuli, ob æqualitatem Diametrorum: majores autem C Circulo: quum minor ſit hujus Dimetiens. Sed & æquè ſignificans eſt & manifeſta altera pars Definitionis, vel ex ea, quam in Principiis Libri Primi poſuimus, Circuli Definitione.

Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ ἐκβαλλομένη, οὐ τέμνει τὸν κύκλον.

2 Contingere Circulum recta linea dicitur, quæ

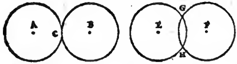


Circulo incumbēs in vtramque partem ejecta, Circulum non ſecat.

Circulum A, linea B C contingit in D puncto. Sed Circulum B, linea C D ſecat in E & F punctis.

Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵ τινες ἀπτόμενοι ἀλλήλων, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

3 Circuli ſeſe contingere dicuntur, quorum Peri-

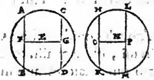


pheriæ ſeſe tangentes, inter ſe non ſecant.

Duo Circuli A & B ſeſe contingunt in C. Duo verò E & F, ſecant alter alterum in G & H punctis.

Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ᾽ αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσι· μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ᾽ ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

4 Æqualiter diſtare à Centro, lineæ dicuntur, quũ à Centro ad ipſas ductæ perpendiculares ſunt æquales. Remotior autem à Centro linea, in quam major perpendicularis cadit.



Vt in Circulo A B C D, duæ lineæ A B & C D æqualiter diſtant ab E Centro: propterea quòd duæ E F & E G perpendiculares, ſunt æquales. At in Circulo H K L M, remotior eſt H K à Centro N quàm ſit L M. Eſt enim N O ipſa N P major.

Τμῆμα κύκλου, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

5 Sectio Circuli, eſt Figura comprehenſa ſub recta linea & peripheriæ portione.

Figu

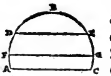


Figura A B C, quam conſtituunt A C recta & A B C portio peripheriæ: Item D B E, quam conſtituunt D E recta & D B E portio ejuſdem, Sectiones ſunt Circuli. Rectæ verò A C & D E Chordæ vulgò dicuntur: ſicut curuæ A B C & D B E, Arcus. Sed F B C figura, proprio nomine Semicirculus vocatur: & F G, Diameter.

Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν, ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.

6 Angulus ſectionis, eſt qui ſub recta linea & Circuli peripheria comprehenditur.

In poſterioribus Figuris, Anguli D, A, E, & C, Sectionis dicuntur.

Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥ ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

7 In ſectione angulus conſiſtit, quem efficiunt duę lineæ, à ſubtenſæ baſis finibus ad punctum aliquod peripheriæ ſectionis concurrentes.

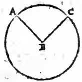
Peletario ſuam verſionem reliquimus, licet cum Græco non conueniat.



Angulus A B C, qui fit à duabus A B & B C rectis, quæ exeuntes à duobus terminis A & C ſubtenſæ A C, ad punctum B coëunt: in ſectione conſiſtit. Quòd ſi angulum B abſque baſi A C, hoc eſt, ſine Trianguli conſideratione accipias: is in peripheria eſſe dicetur.

Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ αὐτοῦ τοῦ κύκλου σταθῇ ἡ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.

8 Sector Circuli, eſt Figura comprehenſa ſub lineis

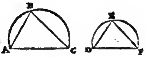


neis rectis,quæ,à duobus peripheriæ punctis eductæ,ad Centrum conueniunt.

Duæ lineæ A B & C B, à duobus punctis A & C peripheriæ, ad Centrum B concurrentes, Circuli Sectorem A C B conſtituunt.

Ὅμοια τμήματα κύκλου ἐστὶ, τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

9 Similes Sectiones Circuli, dicuntur quæ angulos æquos ſuſcipiunt: vel in quibus anguli ſunt æquales.



Vt, ſi angulus rectilineus B, Sectionis A B C, æqualis ſit angulo E, Sectionis D E F: duæ Circuli Sectiones A B C & D E F dicentur Similes.

ÆQVALES verò Sectiones non definit: quia earum infinitæ ſunt deſcriptiones. Poſſunt enim ſub inæqualibus rectis lineis æquales Sectiones conſtitui, ſed in Circulis inæqualibus: quum ex omni Circulo poſſit intelligi pars abſcindi, parti alterius Circuli æqualis. Sed quæ æquales ſunt & rectis lineis æqualibus continentur, æquales omnino habent peripherias. Diuiſiſq; rectis lineis bifariam, perpendiculares ad peripheriam erectæ, æquales ſunt. Vt duæ ſectiones A B C & D E F, ſub lineis A C & D F æqualibus conſtitutæ, ſi ſint æquales, duæq; A C & D F diuidantur bifariam in punctis G & H: erunt quoque duæ perpendiculares A B & D E æquales. Quod nos præmittēdū duximus, demōſtrandæ vigeſimæſecūdæ & vigeſimætertiæ hujus gratiâ: quum ſignificātior Definitio dari non poſſit Sectionum Æqualium. Nam ſi in Circulis æqualibus, quælibet puncta vtriuſque equaliter diſtant à linea ſubtenſa, nulla eſt inæqualitas portionum. Non delineata eſt figura huic loco accommoda, quia eam lector facilè ſubaudit.

PRO

PROBLEMA PRIMVM,

PROPOSITIO PRIMA.

Οὗ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Dati Circuli Centrum inuenire.

Sit datus Circulus A B C, cujus Centrum ſit inueniendum.

In ipſo Circulo duco lineam fortuitam A C; quam diuido æqualiter, per decimam Primi, in puncto D: A quo excito perpēdicularem D B, per vndecimam ejuſdem: quæ vtrimque protracta, peripheriam attingat in punctis B & E. Hanc etiam B E diuido æqualiter in puncto F. Dico punctum F eſſe Centrum Circuli.

Nam ſi in F non eſt Centrum, non erit in puncto alio lineæ E B, vt in G: Eſſent enim à Centro ad peripheriam duæ G B & G E inæquales. Erit ergo extra E B lineam: ſitq;, ſi poſſit, in H puncto. Et connectantur H A, H C, & H D: vt fiat Triangulum H A C, diuiſum in duo Triangula H A D & H C D. Et quia duo latera H A & H D, Trianguli H A D, ſunt æqualia duobus lateribus H C & H D, Trianguli H C D, & baſis A D baſi D C æqualis: erit per octauam Primi, angulus A D H æqualis angulo C D H: quapropter vterq; rectus, per decimam Definitionem Primi. At angulus H D B poſitus eſt rectus: Erit igitur angulus A D B ipſi A D H æqualis, pars toti, contra animi ſenſum. Non eſt igitur Centrum in H puncto. Sed nec vſpiam alibi inuenietur quàm in F puncto: Quod erat oſtendendum.



V I D E S ex Recto & Æquo, punctum omnium maximè momentaneum peruestigari. In quo rationi conueniens erat, vt linea E B in vtramque partem æqualiter (vt indicat perpendiculum) inclinata, Circulum diuideret per medium: atq; ob id, Centrum in ſe contineret. Sed quoniam id repræſentaba-

tur tantùm, non conſtabat: ad abſurdum perducitur qui aduerſatur. Vt in Circulo Affirmatio Negatioq; conueniant: ſicut in Vniuerſo Actio & Priuatio: Generatio & Corruptio. Ac breuiter contrariis omnia conſtant & perficiuntur. Centri igitur inueſtigatio, veritatis conquiſitionem graphicè exponit: quæ quum vna ſit, atq; in medio poſita: tamen inuentu longè difficillima, per controuerſias elucеſcit: ac nonniſi bono & æquo obſequitur.

Conſectarium.

Si in Circulo recta linea rectam lineam æqualiter & ad angulos rectos diuidat, in diuidēte eſt Centrum Circuli.

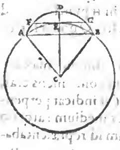
Hoc verò ſatis patet ex Demonſtratione jam poſita, Si igitur duæ lineæ in Circulo æqualiter ſecent altera alteram: Centrum in puncto ſectionis ſitum erit. Quod tamen poſterius probabitur.

THEOREMA 1, PROPOSITIO II.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Si ad duo puncta peripheriæ recta linea applicata fuerit, ipſa intra Circulum tranſit.

Sint duo puncta A & B, in peripheria Circuli AB, cujus Centrum C. Dico non poſſe educi lineam rectam ab A ad B, quin ſecet Circulum. Alioqui, tranſeat extra Circulum, vt linea A D B: quæ ſit recta, ſi fieri poſſit. Et connectantur C A & C B: vt ſit recta A D B, baſis Trianguli C A B. Eruntq;, per quintam Primi, duo anguli C A B & C B A æquales. Tum à Centro C ducatur recta C D, quæ ſecet peripheriam in puncto E. Et erit, per decimamſextam Primi, angulus A D C major angulo C B D: ob idq; major angulo C A D; ac propterea latus A C, per decimamoctauam ejuſdem, majus latere C D. Et quia latus C E æquale



eſt lat

eſt lateri C A: erit C E majus C D, pars toto, quod eſt abſurdum. Quare linea A D B non tranſibit; vt recta ſit, extra Circulum: ſed ſecabit ipſum: Quod erat probandum.

HÆC Propoſitio tacitè conſequebatur ad Definitionem Sectionis Circuli: quæ omni arcui rectam ſubtenſam tribuit. Subtenſâ autem intra Circulum exiſtente, nulla alia extra Circulū recta, in eadem puncta terminabitur, ne duæ rectæ ſuperficiem concludant. Item & ex linea contingente Circulum. Nam ſi qua recta linea eſt quæ contingat Circulum, ipſa erit F G: quæ vtrimque educta attinget lineam A D B, vt in punctis F & G: Sicq; rurſus duæ lineæ rectæ concludent ſuperficiem, contra principium. Et tamen fuit proponendum & demonſtrandum, ne in ſequentibus cogeremur contradictiones ſæpius excipere.

THEOREMA 2, PROPOSITIO III.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου, εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

In Circulo, ſi recta linea per Centrum ducta rectam lineam extra Cētrum ductam bifariam ſecuerit, ipſam quoq; ad angulos rectos diuidet: Et ſi ad angulos rectos diuiſerit, ipſam etiam bifariam ſecabit.

Sit Circulus A B C: in quo linea D E per Centrum ducta, lineam A B extra Centrum ductam ſecet bifariam in puncto F. Dico angulos qui ad F, eſſe rectos: Contrà etiam, ſi anguli qui ad F recti, lineam A B bifariam diuidi in F puncto.



Connectam E A & E B. Eruntq; duo latera E A & E F, Trianguli E A F æqualia duobus E B & E F, Trianguli E B F: baſis verò A F baſi F B, ex poſitione, æqualis. Quare, per octauam Primi, angulus F vnius, æqualis angulo F alterius: & proptereà recti; Quod eſt prius.

Iam vterque angulus qui ad F, ponatur rectus. Et conſtat, ex quinta Primi, duos angulos A & B eſſe

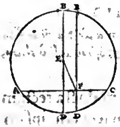
æquales: quum ſint duo latera E A & E B æqualia. Quare in duobus Triangulis E A F & E B F, erunt, per vigeſimam ſextam Primi, duo latera A F & F B æqualia: Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 3, PROPOSITIO IIII.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Si duæ rectæ lineæ, ſe in Circulo ſecantes, per Centrum non tranſierint: neque ſe biſariam ſecabunt.

Sit Circulus A B C D, cujus Centrum E: in quo duæ lineæ A C & B D ſecent inter ſe in puncto F: quarum neutra, vel etiam altera tantùm, per Centrum tranſeat. Dico ipſas ſe mutuò non per æqualia ſecare. Nam ſi ſic altera vtramque per æqualia ſecare poſſit: ſit prius vt neutra per Centrũ



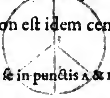
tranſeat. A Centro E ducam lineam E F. Eritq́; per priorem partem antecedentis, vnuſquiſque angulorum E F A, E F B, E F C, & E F D, rectus: Quod fieri non poteſt, ne pars ſit toti æqualis.

Si verò altera tantùm illarum, vt B D, per Centrum tranſierit: dico ſic quoque ipſas ſe non biſariam ſecare. Nam, per priorem partem antecedentis, B D per Centrum tranſiens, diuidensq́; A C per æqualia, diuidet eandem ad angulos rectos. Et quia A C diuidit ipſam B D æqualiter: ipſa per Centrum tranſibit, ex Conſectario primæ hujus: Quod eſt contra poſitionem. Quare A B & & C D non ſe per æqualia ſecant: Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 4, PROPOSITIO V.

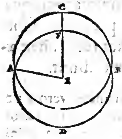
Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Circulorum ſe mutuò ſecantium non eſt idem centrum.



Sint duo Circuli A B C & A D B, ſecantes ſe in punctis A & B. Dico eorum non eſſe vnum Centrum.

Nam ſi vnum poſſit eſſe, ſit ipſum E punctum: Et ducatur linea



linea E A : ac mox linea E C : quæ ſecet A C B peripheriam in puncto C : & A D B alteram peripheriam in F. Eruntq;, per Centri Definitionem, E A & E F æquales: ſed & E A & E C æquales. Quare, quum ambæ E F & E C ſint æquales ipſi E A : erunt & ipſæ inter ſe æquales : Quod eſſe non poteſt Non igitur E, ſed nec vllum aliud punctum, erit vtriuſque Centrum : Quod erat probandum.

THEOREMA 5, PROPOSITIO VI.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Circulorum ſe contingentium non eſt idem Centrum.



Sint duo Circuli A B A & A C A, ſe contingentes in puncto A. Dico eorum non eſſe idem Centrum.

Si enim idem poſſit eſſe, ſit ipſum D: Et ducantur D A & D B C lineæ. Eritq;, per definitionem Centri & Circuli, vtraq; linearum D B & D C æquales ipſi D A. Quapropter D B æqualis D C : Quod eſſe non poteſt. Circulorum verò ſeſe extrinſecùs tangentium ſatis conſtat diuerſa eſſe Centra : quum Centrum ſit in medio ſui Circuli.

THEOREMA 6, PROPOSITIO VII.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον· μεγίστη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή· τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Si in Diametro Circuli punctum ſignetur aliud à Centro, & ab ipſo ad peripheriam plures educantur

 lineæ:

lineæ : maxima erit in qua Cẽtrum, minima verò quæ Diametrum perficit. Sed quæ Centro propiores ſunt, cæteris longiores. Duæ autem dumtaxat rectæ lineæ æquales ab ipſo puncto ad peripheriam exibunt.

Sit Circulus A B C D, cujus Centrum E, Diameter verò A E D: in qua ſignetur punctum F inter E & D. Et ab ipſo F educantur lineæ F B, F C, & F G. Dico F A eſſe maximam linearum, minimam verò F D: Aliarum autem, F B ipſâ F C majorem : & F C ipſâ F G. Dico etiam duas tantùm lineas rectas æquales educi poſſe vtrimque ab F puncto ad peripheriam.



Connectantur enim E B, E C, & E G. Et quoniam duo latera F E & E B, Trianguli B E F, ſunt, per vigeſimam Primi, majora tertio F B: erit & F A major F B: quum F A ſit æqualis duabus F E & E B. Rurſus, quum duo latera E B & E F, Triãguli B E F, ſint æqualia duobus E F & E C, Trianguli C E F : angulus autem B E F major angulo C E F : erit & baſis F B, per vigeſimamquartam Primi, major baſi F C: Atque eadem ratione F C major quàm F G. Quoniam rurſus duæ E F & F G, per vigeſimam Primi, majores ſunt quàm E G : erunt & majores quàm E D : quum E G & E D ſint æquales. Communi itaque ablata E F, ſupererit F G major F D. Maxima igitur eſt F A, minima verò F D. Major autem F B quàm F C : & F C quàm F G : Quod eſt prius.

Conſtituatur porrò angulus F E H, per vigeſimamtertiam Primi, æqualis angulo F E G : & connectatur F H. Quumq; E F & E G ſint æquales duabus E F & E H : erit, per quartam Primi, baſis F G baſi F H æqualis.

Ac jam probabitur ab ipſo F puncto, aliam lineam quàm F H, ad peripheriam educi non poſſe, æqualem ipſi F G. Nam ſi poſſit, ducatur F K. Quumq; F H ſit æqualis F G : erit & ipſa F H ipſi F K æqualis, repugnante prima parte hujus Propoſitionis: quum ſit F K propior Centro. Duæ igitur dumtaxat F G & F H ſunt æquales.

V E L ſic. Connectatur E K. Et quoniam æqualis eſt E G ipſi E K, communis autem E F: & baſis F G baſi F K æqualis : erit,

per

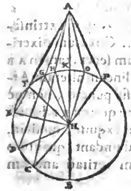
per octauam Primi, angulus F E G æqualis angulo F E K. At angulus F E H poſitus eſt æqualis angulo F E G. Erit igitur angulus F E K æqualis angulo F E H, minor majori, quod eſt abſurdum.

Hinc manifeſtum eſt, duas lineas ab aliquo puncto Diametri hinc inde exeuntes, ſi æquales angulos cum Diametro fecerint, æquales eſſe. Quales hoc loco ſunt duæ F G & F H lineæ.

THEOREMA 7. PROPOSITIO VIII.

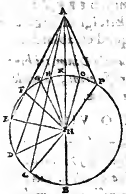
Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη μὲν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐσται. τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου. τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης, τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Si à puncto extra Circulum ſignato lineæ exeuntes, Circulum ſecent: maxima eſt quæ per Centrum tranſit: Aliarum autem quæque, quanto huic propior, tanto major. Partium verò ipſarum, quæ extrinſecus in peripheriam cadunt, minima eſt quę in continuum eſt Diametri: aliarum autem quæque, quanto huic propior, tanto minor. Et duæ dumtaxat rectæ lineæ æquales ab ipſo puncto in peripheriam cadunt.



A puncto A ſignato extra Circulum B C D B, cujus Centrum N, ducantur plures lineæ ſecantes Circulum; ſintq; A K N B, A H C, A G D, & A F E. Dico A B per Centrum eductam omnium eſſe longiſſimam: & A C majorem A D, & A D majorem A E. Earum verò, quæ extrinſecùs ſunt partium, minimam eſſe A K, & A H minorem A G, & A G minorem A F. Dico præterea duas tantùm rectas lineas æquales à puncto A in peripheriam cadere poſſe.

Conne



Connectantur N C, N D, N E, N F, N G, & N H. Eademq; erit argumentandi ratio quę in antecedente. Nam in Triangulo A C N, duo latera A N & N C (quibus eſt æqualis A B) ſunt majora A C, per vigeſimam Primi: Quapropter & A B major A C. Rurſus, quum angulus A N C, major ſit angulo A N D: erit A C major A D, per vigeſimamquartam ejuſdem: ob idq; A D major A E. Et quoniam N K eſt æqualis N H: ſed N H & H A majores N A: ablatis æqualibus N H & N K, ſupererit A H major A K. Et quoniam angulus A N G, major eſt angulo A N H: erit baſis A G major baſi A H: ob idq;, A F major A G. Maxima igitur eſt A B earum quæ per Circulum educuntur. Major autem A C quàm ipſa A D: & A D major quàm A E. Minima porrò exteriorum eſt A K: & minor A H quàm A G, & A G minor quàm A F: Quod eſt prius.

IAM vero conſtituatur, per vigeſimamtertiam Primi, angulus A N O æqualis angulo A N H, Eritq; duorum Triangulorum A N H & A N O, baſis A H æqualis baſi A O, per quartam Primi. Neq; erit alia ipſi A H æqualis. Nam ſi ponatur A P: erit & ipſa A P, per communem Notionem, æqualis A O: Quod jam probauimus fieri non poſſe: quum ſit A O ipſi A B propior.

VEL ſic. Quoniam angulus A N P, major eſt angulo A N H (eſt enim A N O ipſi A N H æqualis): erit quoque baſis A P, major baſi A H, per vigeſimamquartam Primi. Non igitur æqualis. Quare duæ tantùm lineæ rectæ æquales vtrimque à puncto A in peripheriam cadunt: Quod erat demonſtrandum.

NEMO autem offendatur, quod hic lineas quæ extrinſecus aduenientes Circulum penetrant, ſecare Circulum dixerimus. Nam tametſi propriè ſola K B Circulum ſecet, tamen A B ſic ſecare Circulum dicitur, vt quęuis linea lineam alteram. Atque vt linea N B peripheriam ſecat vnico ſui puncto, nempè puncto B: ita A B Circulum ſecat, ea ſui parte quæ eſt K B. Faceſſat igitur calumnia. Nos enim Geometriam exquiſitè quidem, ſed non nimis anxiè tractamus. Sed quæ abundant, quantum poſſumus, reſecamus: atque ad breuitatem veritati amicam contrahimus.

THEOR

THEOREMA 8, PROPOSITIO IX.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

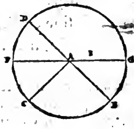
Si à puncto intra Circulum ſignato, plures quàm duæ æquales rectæ lineæ ad peripheriam ductæ fuerint: punctum illud erit Circuli Centrum.

Sit punctum A, ſignatum in Circulo B C D: ſintq; tres rectæ lineæ A B, A C, & A D, ad peripheriam eductæ, æquales. Dico punctum A eſſe Centrum Circuli.



Connectam enim B C & C D: Quarum vtramque diuidam æqualiter: illam quidem in puncto E, hanc verò in puncto F. Et ducam A E & A F: quas vtrimque producam ad peripheriam Circuli.

Eritq; Triangulorum A B E & A C E, vterque angulus qui ad E, æqualis: ob id, vterque rectus. Eadem ratione vterque angulorum qui ad F, rectus. Et quia A E diuidit B C per medium: & A F itidem D C per medium: vtraque ipſarum tranſit per Centrum, ex Conſectario primæ hujus. Quare, quum vtraque occurrat alteri in puncto A: erit ipſum A Centrum Circuli: Quod erat probandum.

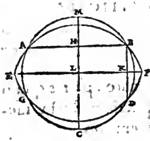


ALITER ab impoſſibili. Sit E, ſi poſſit, Centrum Circuli: ex quo, per punctum A, vtrimque extendatur linea ad puncta F & G peripheriæ: vt ſit F G Dimetiens Circuli. Eritq;, per ſeptimam hujus, A G maxima: & major A B quàm A C, quum ſit propior Centro E: Quod eſt contra hypotheſin.

THEOREMA 9, PROPOSITIO X.

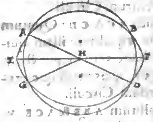
Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο.

Circulus Circulum in pluribus quàm duobus punctis non ſecat.



Secet, ſi fieri poſſit, Circulus A B C, Circulum D B F in pluribus quàm duobus punctis, vt in A, B, D, & G. Et coniunctæ A B & B D, ſecentur æqualiter in H & K. A quibus H & K punctis, excitentur perpendiculares H C & K E: quæ extendantur vtrimque ad E, F, C, & M, puncta peripheriæ D E F: ſecentq; inter ſe in L puncto.

Et erit, per Conſectarium Primæ hujus, punctum L Centrum vtriuſque Circuli, repugnante quinta ejuſdem.

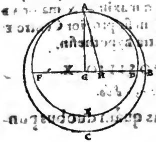


A L I T E R. Secent ſe, vt priùs, duo Circuli in punctis A, B, D, G. Et, per primam hujus, ponatur H Centrum Circuli A B C. Et connectantur tres H A, H D, & H G: quæ ex definitione Centri & Circuli, erunt æquales. Et quia exeunt ad peripheriam vtriuſque Circuli, nempè ad ſectionem ipſorum: erit & H per antecedentẽ, Centrum Circuli D E F, contra quintam Propoſitionẽ ejuſdem.

THEOREMA 10, PROPOSITIO XI.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη, ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων. Ἐὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη, διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Si Circulus Circulum, ſiue introrſum, ſiue extrinſecus, tangat: per Centra vtriuſque ducta linea, in contactum ipſorum cadit.

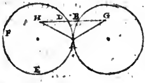


Duo enim Circuli A B C & D E F ſeſe tangant introrsùm in puncto A. Dico lineam eductam per eorum Centra, cadere in A punctum.

Sin minùs, cadat aliorsùm: ſitq; G Centrum Circuli A B C, ex prima hujus: & H Centrum Circuli D E F. Tum per G & H ducatur linea G B, ſecans peripheriam interioris Circuli in puncto

cto D: exterioris verò in B. Et ducantur G A & H A. Et quia, per vigeſimam Primi, G H & H A majores ſunt G A: erunt & majores G B. Communi igitur ablata G H: erit H A major H B. Sed H D æqualis eſt ipſi H A: vtraque enim è Centro. Major igitur eſt H D quàm H B, pars toto.

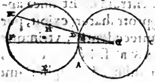
ALITER. Producatur D H ad punctum F peripheriæ D E F. Et quia G eſt extra Centrum H in Diametro Circuli D E F: major erit G D quàm G A, per ſeptimam hujus. At G B eſt æqualis G A. Major igitur G D quàm G B, pars toto.



Iam verò, ſi duo Circuli ſe extrinſecùs tetigerint: ducatur, vt priùs, linea G H per Centra jam poſita G & H; ſecans ambas peripheria in duobus punctis B & D: Et connectantur G A & H A.

Eruntq́; per vigeſimam Primi, duæ G A & H A majores G H. Quapropter & duæ G B & H D majores G H: Quod eſt falſum.

ALITER. Sint duo Circuli A B C & D E F ſeſe extrinſecùs tangentes in puncto A: ſitq́; Circuli A B C, Centrum G, vt priùs: A quo per contactum Circulorum producatur G A linea, ad punctum F peripheriæ D E F. Quæ quia negatur tranſire per Centrum ipſius D E F Circuli, ducatur ab eodem centro G, altera linea G K: quæ tranſeat, ſi fieri poſſit, per Centrum H



ipſius D E F: ſecans peripheriam A B C in puncto B, & D E F in puncto D: partemq́; ipſius oppoſitam in puncto K. Et quia à puncto G extra Circulum D E F ſignato, ducitur linea G K, tranſiens per Centrum H: & altera non per Centrum tranſiens, G F: minor erit pars illius exterior G D, parte hujus exteriori G A: per octauam hujus. Sed G A eſt æqualis G B. Minor igitur erit G D ipſa G B, totum parte: Quod eſt abſurdum.

HANC poſteriorem partem probauimus ex octaua hujus, ſicut priorem ex ſeptima: & ſanè commodiùs. Prior enim figuratio & ſi ex arte fit, tamen non facilè accipitur: Neutrum enim Centrorum in ſuo loco conſiſtit.

Cæterùm ex his duabus Theonis, vnam fecimus: quòd tam ſint hæc duo capita conjuncta, quàm duo ſequentia.

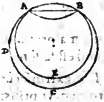
THEOREMA 11, PROPOSITIO XII.

Theoni 13.

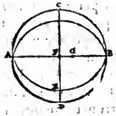
Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἕν, ἐάν τε ἐντὸς, ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.

Circulus Circulum non tangit in pluribus punctis vno : & ſi introrſum, & ſi extrinſecus tangat.

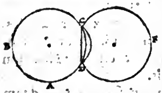
Nam ſi fieri poſſit, tangat Circulus A B C D, Circulum A B E priùs introrsùm in duobus punctis A & B: pòſt extrinſecùs, tangat Circulus A E B A, Circulum A C B D in duobus A & B punctis.



Quum itaque in priori conſtructione duxerimus lineam rectam ab A ad B, ſi ipſa ceciderit extra Circulum A B E interiorem : id erit contra doctrinam ſecundæ hujus. Si verò cadat intra ambos : quum diuiſerimus ipſam æqualiter, vt in F, & eduxerimus perpendicularem tranſeuntem per F ad vtramque peripheriam : ipſa tranſibit per vtriuſque Centrum, ex Conſectario primæ hujus : repugnante ſexta ejuſdem : immò & antecedente: quum non cadat in contactum ipſorum.



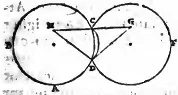
V E L ſic. Sit exterioris Circuli Centrum F : interioris verò Centrum G. Et linea applicata ex F in G, ſi protrahatur, exibit, per priorem partem antecedentis, vtrimque ad duos contactus A & B. Eritq; F A æqualis ipſi F B : è Centro enim ad peripheriam: Quapropter major erit F A quàm G B. Eadem ratione erit G B æqualis G A. Quare F A major G A, quod fieri non poteſt.



S E D nec extrinſecùs ſeſe contingent. Linea enim ducta à puncto C ad punctum D, cadet quidem intra vnum Circulorum, ſed extra alterum : Quod eſt contra ſecundam hujus.

A L I T E R. Si ſeſe contingant in duobus punctis, vt in C & D : duc

D: ducatur linea recta à Centro vnius ad Centrum alterius. Atque hæc, per antecedentem, tranſibit per punctum C & per punctum D. Quod fieri non poteſt, ne duæ lineæ rectæ includant ſuperficiem.



Poteſt etiam duci linea recta à Centro ad Centrum: Quæ tranſibit, verbi gratia, per C, alterum contactuum: ex antecedente. Ac tum connexis G D & H D, fiet Triangulum, cujus duo latera G D & H D non erunt majora latere G C H, contra vigeſimam Primi.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XIII.

Theoni 14.

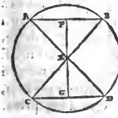
Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

In Circulo, ſi rectæ lineæ æquales fuerint: eæ à Centro æqualiter diſtabunt. Et ſi à Centro æqualiter diſtiterint: ipſæ erunt æquales.

In Circulo eſſe rectæ lineæ dicuntur, quæ ad Peripheriam vtrimque terminantur.

Sint in Circulo A B C D, cujus Centrum E, duæ lineæ A B & C D æquales. Dico ipſas à Centro æqualiter diſtare: Et contrà, ſi à Centro æqualiter diſtent, ipſas eſſe æquales.

Ducam à Centro lineas E F & E G, perpendiculares ad A B & C D. Eritq́ʒ, per ſecundam partem tertiæ hujus, A B æqualiter diuiſa in F: & C D æqualiter in G puncto. Connectam poſtmodùm E A, E B, E C, & E D. Et quoniam duo latera A B & A E, Trianguli A E B, ſunt æqualia duobus lateribus C D & C E, Trianguli C E D, & baſis E B, baſi E D: erit, per octauam Primi, angulus B æqualis angulo C. Quum itaque duo latera A E & A F, Trianguli A E F, ſint æqualia duobus lateribus C E & C G, Trianguli C E G: erit, per quartam Primi, baſis E F, baſi E G æqualis: Quæ quum ſint perpen-



 dicu

diculares; erunt A B & C D æqualiter diſtantes à Centro, per quartam Definitionem hujus.

ALITER. Quadratum ipſius A E eſt æquale Quadratis duarum A F & E F, per quadrageſimamſeptimam Primi: Et Quadratum E C, per eandem, æquale Quadratis C G & E G. Atqui Quadratum A E eſt æquale Quadrato E C. Erunt igitur Quadrata duarum A F & E F æqualia Quadratis duarum E C & E G. Demptis itaque æqualibus A F & C G, ſupererunt duo Quadrata E F & E G æqualia. Quapropter ipſæ E F & E G lineæ, ſunt æquales ob idq; A B & C D, per Definitionem, æqualiter diſtant à Centro: Quod eſt prius.

Iam conſequitur, ſi A B & C D æqualiter diſtant à Centro, ipſas eſſe æquales. Nam quum Quadrata duarum E F & F G ſint æqualia: ipſis ablatis, ſupererunt Quadrata duarum A F & C G æqualia: ob id, & ipſæ æquales. Erunt igitur A B & C D æquales, quum earum dimidia ſint æqualia: Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 13. PROPOSITIO XIIII.

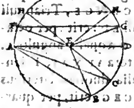
Theonis 15.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί.

In Circulo, maxima linearum eſt Diameter: Aliarũ verò vnaquæq; quanto propior Centro, tanto major.

In Circulo A B C D, cujus Centrum E, ſint plures lineæ A B, A C, A D, F G & H K: quarum A D ſit Diameter Circuli. Hanc dico eſſe omnium longiſſimam: Alias verò ſingulas quanto propiores Centro, tanto ſingulis eſſe majores.

Cum Centro connectantur extremitates omnium, ductis E B, E C, E G, E K, E H, & E F. Eruntq;, per vigeſimam Primi, duo



latera E F & E G, Trianguli E F G, majora tertio F G: Quæ quum ſint æqualia ipſi A D: erit A D major F G. Eademq; ratione, major quàm vnaquæque reliquarum, ſi ipſæ ponantur baſes Triangulorum: quũ bina quæque latera è Centro exeuntia, ſint ipſi A D æqualia: Quod eſt prius. Porrò, quum duo latera E F & F G, Trianguli E F G, ſint æqualia duobus E H & E K, Trianguli E H K: &

ang

angulus F E G major angulo H E K: erit, per vigeſimamquartam Primi, baſis F G major baſi H K. Haud diſſimili ratione erit A C major quàm A B. Sicq; patet tota Propoſitio.

THEOREMA 14. PROPOSITIO XV.

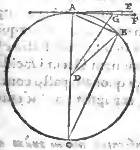
Theoni 16.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

Quæ ab extrema Circuli Diametro perpendicularis ducitur linea, extra Circulum cadit: Neque inter ipſam & peripheriam altera recta linea capi poteſt. Et Semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major eſt, reliquus autem minor.

Sit Circulus A B C, cujus Centrum D, Diameter verò A C: per cujus extremitatem A, ducatur linea perpendicularis, vt A E. Dico ipſam cadere extra Circulum.

Sin minus, cadat perpendicularis intra: & ſit illa A B: Et connectatur D B. Eritq; per quintam Primi, angulus D A B æqualis angulo D B A: ob idq., rectus. At in Triangulo, duo anguli recti eſſe non poſſunt, per decimamſeptimam Primi. Non igitur A B, neque alia intra Circulum, perpendicularis erit ſuper extrema Diametro.



Vel ſic. Connectatur C B. Et quia angulus C A B eſt rectus; ipſe erit maior angulo A B C, per decimamſeptimam Primi, atque ob id, erit latus C B, majus latere A C, per decimamnonam ejuſdem, contra antecedentem. Cadet ergo perpendicularis extra Circulum, qualis eſt A E: Quod eſt primum.

Dico inſuper, inter A E & peripheriã non capi alteram lineam rectam. Quæ ſi poſſit, ipſa ſit A F: ad quam ducatur perpendicularis D G: vt ſit D G A angulus rectus. Eritq;, per decimãnonã Primi, latus D A majus latere D G: quod eſt fal

eſt falſum. Quare, inter A E & peripheriam nulla linea recta intercipitur: Quod eſt ſecundum.

Poſtremò, Dico angulum C A B, qui fit à Diametro C A & Semicirculo A B C, majorem eſſe omni angulo acuto rectilineo: & E A B eodem minorem. Eſt enim C A E rectus: ob id omni acuto major: conſtatq; duobus E A B & C A B mixtis angulis. At verò inter E A & B A, nulla recta linea capi poteſt, vt modò probauimus. Quapropter, quum E A B diuidi nequeat per lineam rectam: erit minima pars quæ à recto poſſit auferri, & C A B maxima. Omnis enim angulus Rectilineus per æqualia diuiditur, ex nona Primi. Ac ſic conſtat tota Propoſitio.

Conſectarium.

Recta linea ab extremitate Diametri perpendicularis, Circulum tangit: idq; in vno puncto.

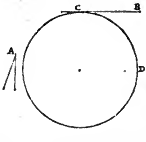
Nam ſi in duobus punctis tangat, ipſa intra Circulum cadet, per ſecundam hujus: Quod modò improbauimus.

QVVM verò hujus Theorematis caput poſtremum attentiùs conſiderarem, mihi ſanè in mentem ſubiit prima ſpecie, Geometriam non ſatis ſibi conſtare: immò adeò, repugnãtiam in ſe admittere.

Primùm enim extra intelligentiam eſt, vt inter Quantitates minima dari poſſit: qualem hoc loco angulum, quem dicunt, Contingentiæ, ſeu rectiùs, Contactus, minorem omni acuto poſuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima Quantitas detur: qualis hîc angulus Semicirculi omni acuto rectilineo major ponitur. Quantitas enim eo nomine Quantitas eſt, quòd partibus conſtet: & ſecundùm eam æquale & inæquale dicatur. Quantitatis etiam Continuæ in infinitum ſectio eſt. Atque adeò, quum in primam Propoſitionem Decimi incidiſſem, tum magis anxiè expendere cœpi quonam pacto conciliari poſſet tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima Decimi,

Si à majori duarum Quantitatum auferatur majus quàm dimidium, ac rurſus è reliquo majus quàm dimidium, idq; continuò fiat: relinquetur tandem magnitudo, minor magnitudine minore poſita.

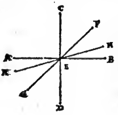
Verbi



Verbi cauſſa, Sint duo anguli, A quidem rectilineus,& B C D, angulus (ſi modò ſit angulus) contactus: Vult Prima Decimi, vt,ſi auferatur ab angulo A, majus quàm dimidium, ac rurſus à reliqua parte majus quàm dimidium: ſicq; continuò ex reſiduis partibus majus quàm dimidium: tandē relinquatur minor angulus quàm B C D. Cujus demonſtrationem hîc non appono, quum ex ſequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria Propoſitio eſt, quæ (vt ſic dicam) magis naturaliter vera ſit. Quod ex Numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non videt, propoſitis duobus Numeris 8 & 2, quum ab octonario majus quàm dimidium abſtuleris, vt quinarium: tum à ternario reſiduo, majus quàm dimidium, vt binarium: relinqui vnitatem, poſito binario minorem?

Neque verò ad rem facit quod Campanus illîc excipit, Propoſitionis ſententiam de quantitatibus ejuſdem generis eſſe intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla eſt: quinetiam menti Euclidis contraria, vt nos, quum illûc ventum erit, manifeſtum faciemus. Immò & ipſe Campanus ſecum pugnat, quum in ſecunda Duodecimi demonſtranda, aliiſq; Propoſitionibus nonnullis Solidorum, ipſe à Curuo Rectum aufert.

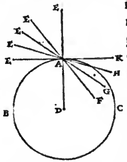
Nos igitur hanc dubitationem ſic expediemus: vt dicamus lineam rectam, quæ Circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere: ſcilicet B C D nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in ſectione conſiſtit, non in contactu. Et vbi ceſſat ſectio, ceſſat quoq; anguli forma. Atque, vt vno verbo dicam, In Decuſſatione (Decuſſationē hoc loco & Sectionem ſine diſcrimine accipio) omnes angulorum ſpecies perficiūtur.



Duabus enim lineis A B & C D ſe ſcindentibus in puncto E ad angulos rectos, intelligatur C D ſic moueri in orbem, ſcilicet ſuper puncto E fixo: vt ex C D fiat F G: hinc ſanè ex recto angulo A E C, fiet obtuſus A E F: inde ex recto B E C, fiet acutus B E F. Quumq; facta fuerit H K: hinc quidem an-

gulus obtuſior fiet H E A, inde verò acutior K E A: ſicq; continuò, donec peruenerit ad A B, & intra eoſdem terminos concludatur cum ea. Tum enim immersâ, vt ſic dicam, lineâ C D in lineam A B, euaneſcet angulus.

Neque diuerſa ratio eſt in Curuo. Sit enim in Circulo A B C A: cujus Centrum D, linea D E præteriens peripheriam,& ſecans ipſam in A puncto fixo. Super quod circumducatur ipſa D E per puncta F, G, H. Tum fient anguli continuò varij cum peripheria in ipſo puncto A: donec, ceſſante decuſſatione, linea E D facta ſit E K, & tangat Circulum. Ac tum linea D E non jam inclinata intelligitur, ſed immerſa in lineam B A C, quantùm ad angulum attinet: non aliter quàm ſi B A C eſſet linea recta. Neque contrà facit, quòd diducantur lineæ, faciantq; ſpatium C A K. Nam id ſola A C linea efficit, quæ rectam refugit: ſed eam tamen in puncto A amplectitur. Quum igitur omnis angulus in pluribus punctis non conſiſtat quàm vno: fit vt punctum A, tam ſit ineptum angulo conſtituendo, quàm modò erat punctum ſectionis E, linearum rectarum. Fortaſsè dices punctum A lineæ rectæ manere in ſuo recto: punctumq; A peripheriæ, in ſuo rotundo: neque vtrumque eſſe idē punctum: ſed lineas ſe tantùm inter ſe veluti lambere, quia altera alteram penitùs omniq; puncto refugit: vt contraria contrapoſita, fiant manifeſtiora. Id verò ſenſus non recipit. duo enim Circuli ſeſe exteriùs tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerent: ſcilicet, ſi intelligeremus Circulum qui in puncto A tangeret ipſum A B C Circulum exteriùs: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri poſſe: vt nihil in cogitationem cadat, quod ſemel vſpiam Geometria non repræſentet. Illud tamen minimè vrgebit. Immò tantò minus contactus linearum erit angulus: Hiabit enim vtrimque ipſarum concurſus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus, per Theoremata.



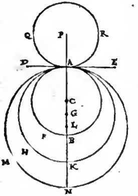
Contactus duorum Circulorum interior, Quantitas non eſt.

Sit enim Circulus A F B A, cujus Centrum C, Diameter verò

A B:

A B : per cujus extremitatem A, ducatur linea D E ad angulos rectos. Et conſtat, ex Conſectario hujus Decimæquintæ, lineã D E contingere ipſum A F B A Circulum: ac propterea D A F eſſe minorem omni angulo acuto, ex ipſa Euclidis ſententia: ſcilicet per vltimam partem hujuſce Decimæquintæ. Iam verò inter puncta C & B, ſuſcipiatur in Diametro A B, Centrum G: & ſpatio G A, deſcribatur alter major Circulus A H K A. Dico F A H non eſſe quantitatem.

Conſtat quippè Circulum A H K A tranſire inter rectam D A & curuam A F: quum ſit Semidiameter G A, major Semidiametro C A. Manifeſtum quoque eſt, lineam D E tangere ipſum A H K A Circulum, ex eodem hujuſce Decimæquintæ Conſectario: ac propterea D A H eſſe ommi acuto minorem. Deſcribatur tertiò, ſecundùm majus ſpatium L A, Circulus A M N A. Et erit, ex eodem Conſectario, D A M omni acuto minor. Sicq; in infinitum, erunt omnes contactus quos efficiet linea D E cum Circulis ductis per A punctum, quorum Centra in A B linea, minores omni acuto Rectilineo: ac ſic omnes æquales (ſi modò æqualitas inter non quanta dici poſſit). Quapropter contactus D A M, erit æqualis contactui D A F: ſictq; vt M A F, contactus interior Circulorum, neque augeat neque minuat contactum D A M. Igitur M A F quantitas non eſt: Quod erat demonſtrandum.



SED & probabimus contactum interiorem Circulorum, quantitatem non eſſe, in hunc modum.

Nempè quum omnes Circuli ſint Similes, erunt & Semicirculi Similes: Quapropter anguli qui fiunt à Diametro & peripheria, in omnibus Circulis ſunt æquales: per Conuerſam Definitionis Similium Sectionum: (nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus B A F, æqualis vtrique angulorum K A H & N A M: Ac propterea cõtactus F A M nihil addit ad angulum B A F. Quare F A M quantitas non eſt: Quod fuit demonſtrandum. Hinc ſequitur alterum,

Contactus lineæ rectæ cum Circulo, Quantitas non eſt.

Manente enim eadem conſtructione, ſi D A F ſit quantitas: ipſa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectã, repugnante vltima parte hujus Decimæquintæ: neque per obliquam, vt per lineam A M: eſſet enim F A M pars ipſius D A F: Atqui F A M quantitas non eſt, vt modò probauimus. Non eſt igitur F A M pars ipſius D A F. Igitur D A F neque per lineam rectam neque per obliquam diuidi poteſt. Quare D A F quantitas non eſt: Quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

Contactus duorum Circulorum exterior, quantitas non eſt.

In eadem conſtructione, protrahatur B A Diameter ad punctum P. Tum Centro P, interuallo autem P A, deſcribatur Circulus A Q A. tangens Circulum A B F A exterius in puncto A. Dico contactum B A Q non eſſe quantitatem.

Id verò manifeſtum eſt ex poſteriori Demonſtratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur: quum F A M non ſit quantitas, per primam harum: neque per rectam, quum neque D A F ſit quantitas, per ſecundam earundem: neque D A Q quantitas, per eandem. Quare, quum F A Q partes nullas habeat, quantitas non erit: Quod erat probandum.

Ex his emerget hoc Pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum eſſe cogitauit,

Anguli qui fiunt à Diametro & Peripheria, ſiue intra ſiue extra Circulum, recti ſunt, & rectis rectilineis æquales.

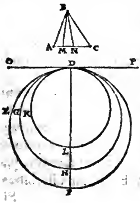
Vt in poſteriore Figura, angulus B A F æqualis eſt angulo B A D: quum ipſi nihil accreſcat ob contactum D A F, qui quantitas non eſt: & ob id Q A P rectus eſt, & æqualis ipſi D A P, quum D A Q nihil addat: Quod erat probandum.

Atque, vt rationes quoque philoſophicas (immò quæ Philoſophiæ pars in Geometria non latet?) Geometricis ſpeculationibus immiſceamus: Circulus ipſe omnia in ſe recipit, ob ſui perfectionem. Quumq; ſit omni ex parte abſolutiſſimus, indignum ſanè eſt vt ipſum Recti minimè capacem eſſe putemus. Vt veriſſimè Plato lineam quæ Circulum conſtituit, rectam eſſe dix

ſe dixerit, non ſecus quàm eam quæ à puncto in punctum breuiſſimè extenditur: etſi illam, diſtinctionis gratia, obliquam vocemus.

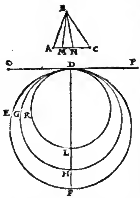
His ad hunc modum demonſtratis, faceſſent à Geometria Paralogiſmi, qualis imprimis ille eſt peruulgatus, quem hûc affert Campanus, Datur, inquit, angulus major angulo B A F, & minor eodem: neque tamen datur eidem æqualis. Id verò ex ſuperioribus refellitur: Nihil enim majus neque minus eo quod quantum non eſt, dici debet. In Numeris quidem id accidit. Datur enim major Numerus quàm $\sqrt{\zeta}$ 8 vt 3: & datur minor eodem, vt 2: neque tamen æqualis eidem. Sed quantitatis Continuæ, quàm Diſcretæ, longè alia eſt natura. Continuorum enim in infinitum ſectio eſt: Diſcretorum non item: Quod & ratio vocabulorum indicat. Nam in continuis nihil vacat, nihilq; intermittitur. In Diſcretis verò omnia nominatim deducta ſunt. Vt, verbi gratia, bis quatuor ſeu octo, Arithmeticè quidem in Quadratum euadere non poſſunt: Geometricè verò maximè. Nos autem ex hac Demonſtratione quàm latum ad Geometriæ abdita perueſtiganda patefecerimus campum, aliquando, Deo juuante, notum faciemus in proprio libello de Quadrato & Circulo: & dubitationes, quæ huc contrà adduci poſſunt, diluemus.

Diſſoluetur & ille Paralogiſmus à Cardano propoſitus libro Subtilium decimoſexto. Aliqua quantitas, inquit, poteſt continuè, atque adeò infinitè augeri, altera verò infinitè minui: Et tamen augmentum illius, quantûcumque euadat, minus ſemper erit decremento hujus.



Verbi cauſa, Sumatur angulus rectilineus A B C: & deſcribantur duo Circuli D E F D & D G H D, ſeſe intrinſecùs tangentes in puncto D: quorum Centra erunt in vna Diametro D F. Tum angulus E D G Circularis, poterit infinitè augeri: ducendo ſcilicet Circulos continuè minores per punctum contactus D, quorum Centra ſint in D F Diametro. At angulus A B C rectilineus poterit infinitè minui, per diuiſiones quales

r 3 docet



docet nona Primi: vt hîc in A B N, poſt in A B M (atque hæc binaria diuiſio ſatis ſit). Et tamen angulus Circularis, augendo nunquàm euadet æqualis angulo rectilineo decreſcenti: vt hîc angulus E D K, minor omninò eſt angulo A B M: Et ſi plures ducerentur Circuli, etiam infiniti: nunquàm fieret angulus contactus tam magnus quàm angulus A B M, immò quàm eius pars milleſima. Quod patet, inquit, ducta linea O P contingente. Angulus enim O D K minor eſt omni angulo acuto rectilineo: quare E D K multo minor erit. Hactenus ex illius ſententia.

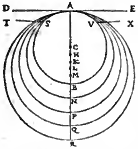
Cui ſic reſpondemus, A B C quidem angulum infinitè minui poſſe: ſed E D G augeri poſſe, id verò inficiamur. Demonſtrauimus enim E D K non eſſe majus E D G. Atque hæc minimè cohærent, O D G æquale eſſe ipſi O D K, ficut & ipſe ibidem aſtruit: & E D K majus eſſe E D G. Nam ſi O D G æquale eſt O D K: nihil vtique addit E D K ad O D G: ob id, neque ad E D G. Quare G D K, immò E D K majus eſſe non poteſt quàm E D G. Sicq; euertitur fallacia.

Proponit ibidem Cardanus ex Apollonio & Rabi Moſe, de duabus lineis in eodem plano exiſtentibus, quæ protractæ ad angulum tendere videntur, propioresq; inter ſe ſemper fiunt: Et tamen magno, vt ipſe putat, miraculo, nunquàm concurrunt: etiamſi in infinitum protrahantur. Quod etiam obiter adnotauerat Georgius Valla ex Gemino, Libro primo ſuæ Geometriæ, Cap. LIX. Eſt poſt hunc Cælius Calcagninus, ad Iacobum Zieglerum ſcribens, ex cujuſdam obſeruatione cujus nomen reticet. Hunc autem paralogiſmum ſuo loco diſſoluemus.

Sed quur inuentum noſtrum differemus? quum jam nunc in præſentia quod pollicemur magna ex parte præſtare poſſimus? Nos enim vt maximè conticendum aliquid duceremus, alia certè habemus ſolidiora & vtiliora: (niſi quòd captioſas Propoſitiones refellere, non paruam habet vtilitatem) quæ in id tempus ſeruabimus, dum integrum Euclidem offeramus.

Sit

Sit itaque Circulus A B A, cujus Centrum C, & Diameter A B: Sicq; linea recta D E Circulum tangens in A puncto. Tum inter duo puncta C & B Diametri, ſuſcipiantur plura centra (ac nunc quatuor ſuſcepiſſe ſatis ſit) H, K, L, M: ſuper quibus deſcribantur quatuor Circuli, A N A, A P A, A Q A, & A R A, tranſeuntes inter D E rectam & A B A peripheriam, ſeq; inter ſe tangentes interiùs in A puncto.



Et manifeſtum eſt, horum quatuor Circulorum peripherias paulatim, &, vt nouè loquar, punctuatim propiores fieri ipſi rectæ D E. Sumatur igitur punctum S in peripheria A N, proximè A punctum. Pòſt, in peripheria A P ponatur aliud punctum, quod propiùs accedat ad ipſam D E quàm punctũ S: quod quoniam ſua nota commodè ſignari non poteſt, vocetur punctum ſecundum. Sit deinde in peripheria A Q, aliud punctum, quod propius ſit ipſimet D E, quàm punctum ſecundum: dicaturq; punctum tertium. Demùm in peripheria A R, ſit punctum propiùs accedens ad eandem D E quàm tertium: atq; hoc nominetur punctum quartùm. Sicq; continuè, ſi intelligantur Circuli duci per contactum A, prioribus majores, quorum Centra in A B linea: eorumq; puncta ſingillatim propiora lineæ D E. Tandem per hæc puncta, nẽpe primũ, ſecundum, tertium, & quartum, & ſi qua eſſent plura, ducatur linea S T. Quam manifeſtum eſt paulatim ſemper accedere ad D E, non ſecùs quàm Circulorum puncta per quæ ipſa educitur: & tamen nunquam conjungi poſſe cum ipſa D E: etiam ſi lineæ infinitè protrahantur, ſcilicet ſi infiniti ducantur Circuli. Quotquot enim ducentur, in vnico puncto A tangent lineam D E: ex hac Decimaquinta. Conſtat igitur lineam S T, vtcunque accedat ad lineam D E, cum ea tamen nunquam conuenire poſſe. Atque hoc idem intelligi volo in alteram partem de linea V X.

Ardices, Video quidem Circulos omnes vnico [illegible] tangi à recta linea D E: ac propterea lin[illegible] infinitè protractam per puncta C[illegible], concurrere cum D E non poſſe. Sed ta[illegible] mirari non deſino quànam ratione id fiat. Sanè ratio Geometrica admirationem tollit: facitq;, vt magis mirum non

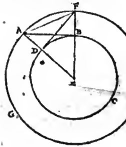
non ſit de linea quàm de Circulis ipſis. Totũ igitur ad Circulũ refertur, modis omnibus mirabilem. Tam enim mirum videri debet propiùs intuenti, peripherias Circulorum, vt hîc A B, A N, A Q, & A R, ſemper remoueri, longiusq; diſcedere à puncto A: & tamen ſuo ipſarum ductu in ipſum A redire: quàm lineam S T ad rectam A D ſemper accedere, eam tamen nunquam attingere. Ob id mixta linea dici debet ex recto & Circulari: ac propterea inter vtrumque perpetuò conſiſtit. Deſinet igitur mirari, qui Circuli formam, rationem, naturam, & constructionem perpenderit. Atque ejuſmodi Lineæ conſtant infinitis lineis in ſe quodammodo recuruis ſeu refractis. Sed quum Circuli per A ducti omninò contigui propter infinitatem intelligantur: hoc loco S T vix aliter ſenſui quàm pro vnica linea obijcitur. Neque dubium eſt quin ipſa ex earum ſit genere quas ex Apollonio proponunt (ac tale eſt in Solidis latus Hyperboles, vt illîc docebimus): at certè nullo modo recta, quod putabat Calcagninus: ſed linea quædam anormis, cujus non ſit mirum neutram eſſe naturam. Verùm nos hæc ad Corporum materiam reponimus, vt ad Circulos reuertamur.

PROBLEMA 2, PROPOSITIO XVI.
Theoni 17.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

A puncto extra Circulum ſignato, lineam ad Circuli contactum ducere.

Sit punctum A extra Circulum B C D, cujus Centrum E, volo à puncto A, ad Circulum B C D, lineam contingentem ducere.



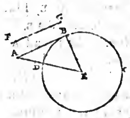
Ab ipſo E Centro ad punctum A, duco rectam E A, ſecantem Circulum in puncto D. Tum ſuper eodem Centro E, ſecundùm interuallum E A, deſcribo Circulum A F G. Et à puncto ſectionis D, excito D F perpendicularem, quæ ſecet Circulum exteriorem in F. Et connecto E F, ſecantem Circulum interiorem in B. Ac poſtremò conne-

cto

cto A B. Dico A B eſſe quæ contingit Circulum B C D.

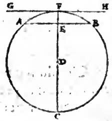
Sumptis enim duobus Triangulis A E B & F E D, erunt duo latera A E & E B illius, æqualia duobus F E & E D hujus: & angulus E vtriq; cõmunis. Baſis igitur A B, per quartam Primi, baſi F D æqualis: & angulus E B A, angulo E D F. Sed angulus E D F rectus: quapropter & E B A rectus. Quare, per Conſectariũ antecedentis, A B linea cõtingit B C D Circulũ: Quod erat demonſtrãdũ.

S I C quoq; demonſtrabimus, exercitationis gratiâ. Ductâ lineâ A E, inueſtigo quantũ poſſit A E ſuprà E D per ea quæ demõſtrauimus ad quadrageſimamſeptimam Primi: & ſit linea F G, potentia A E ſupra E D. Iam verò ex A E linea data, & ex duabus quæ ſint ipſis E D & F G datis æquales, conficio Triangulũ A B E per vigeſimamſecundam Primi. Et E B omninò deſinet in peripheriam ex definitione Centri: Eritq; angulus A B E rectus per vltimam Primi. Quare A B continget Circulum: per Conſectarium antecedentis: Quod erat probandum.



Linea recta, quæ Circulum ſecet, lineam rectam, quæ Circulum tangat, parallelum ducere.

Sit linea A B, ſecans Circulum A B C, cujus Centrum D, in punctis A & B. Volo ipſi A B parallelum ducere, quæ tangat Circulum.



Diuido A B bipartitò in puncto E. Tum per E punctum & per Centrum D, duco Diametrum C D E F. Duco poſtmodùm G F H lineam ad angulos rectos ipſi C F Diametro. Dico G F H, quæ, per conſectarium decimæquintæ, tangit Circulum, eſſe ipſi A B parallelum.

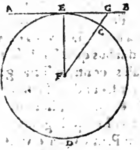
Nam quum recta C F in vtramq; cadens, faciat omnes angulos qui ad E rectos, per tertiam hujus: ſintq; duo anguli qui ad F poſiti recti: erunt A B & G H paralleli, per vigeſimamnonam Primi: Quod erat demonſtrandum. Hæc ad Figuras Circulis inſcribendas percommoda.

THEOREMA 15. PROPOSITIO XVII.

Theoni 18.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἀπτομένην.

Si recta linea Circulum tangat: à Centro ad contactum ducta recta linea, erit tangenti perpendicularis.



Sit linea A B, tangens Circulum C E D, cujus Centrum F, in puncto E. Et à Centro F ducatur linea F E. Hãc dico eſſe perpendicularem ad A B.

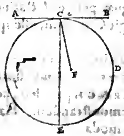
Quæ ſi non fuerit: ſit F G ad A B perpendicularis, ſecans peripheriam in C. Quumq; angulus E G F ſit rectus, erit in Triangulo E F G, latus E F majus latere F G, per Decimamnonam Primi: Quod eſt falſum, quum ſit F C ipſi F E æqualis. Probatur hæc à negatione, in modum Conuerſarum. Eſt enim Conuerſa Conſectarij Decimæquintæ hujus.

THEOREMA 16. PROPOSITIO XVIII.

Theoni 19.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Si Circulum recta linea tangat: à contactu perpendicularis deducta, per Centrum tranſit.



Sit linea A B tangens Circulum C D E in puncto C: A quo demittatur C E perpendicularis ipſi A B, ad punctum E peripheriæ. Dico C E tranſire per Centrum.

Sin aliter: ſit Centrum extra ipſam C E, vt in F, puncto: A quo ad punctum C, ducatur F C: quæ per antecedentem, erit perpendicularis ad A B: ob id, angulus A C F,

lus A C F æqualis angulo A C E, pars toti: Quod eſt abſurdum.

THEOREMA 17, PROPOSITIO XIX.

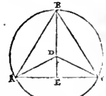
Theoni 20.

Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία, διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

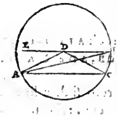
In Circulo, angulus qui ad Centrum duplus eſt ejus qui ad peripheriam, quum vterque ſuper eandem peripheriæ portionem conſtiterit.

In Circulo A B C, cujus Centrum D, ſit angulus A D C ad Cẽtrum, angulus verò A B C ad peripheriam: quorum vterq; ſuper eandem peripheriæ portionem A C conſiſtat. Dico angulum A D C duplum eſſe anguli A B C.

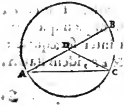
Aut enim neutra duarum A B, & C B, neutram ſecat duarum A D & D C: Aut altera illarum, alterã harum: Aut deniq; altera harum, in altera eſt illarum. Ac primò neutra duarum A B & C B, neutrã ſecet duarum A D & C D Tum per pũctum D ducatur linea B D E. Eritq;, per trigeſimãſecundã Primi, angulus A D E æqualis duobus angulis A B D & B A D, interioribus oppoſitis. Qui quũ ſint æquales, per quintã ejuſdẽ: erit ipſe A E D duplus anguli A B D. Eadem ratione erit angulus C D E duplus anguli C B D. Totus igitur A D C duplus eſt totius A B C: Quod fuit oſtẽdendũ.



Quòd ſi altera illarum, vt A B, ſecet alteram harum, vt C D: tum producta B E, fiet angulus E D C duplus anguli D B C, per trigeſimamſecundam Primi. Dempto igitur E D A, qui duplus eſt anguli D B A, à toto E D C: deptoq; D B A à toto D B C: erit reliquus A D C, reliquo A B C duplus: Quod erat probandum.



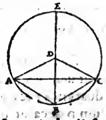
Si verò altera harum, vt A D, ſit in altera illarum, vt A D B ſit linea vna: tum angulus A D C manifeſtò erit, duplus anguli B, per quintã & trigeſimãſecundam Primi: Quod erat demonſtrandum.



Hoc loco annotauit Nicolaus Tartalea ſequentem appendicem. Quam nos in Theorema redegimus: & aliquantò breuiùs demonſtrauimus ex hac Decimanona.

Si fuerint duo anguli, quorum vnus ad Centrum, alter ad peripheriam, & ambo vnâ rectâ lineâ ſubtendantur: erit ſpatium circa angulum, qui ad Centrum, comprehenſum, duplum anguli qui ad peripheriam.

Maneat angulus A D C, vt modò, ad Centrum: & conſtituatur ad peripheriam A B C, angulus ejuſdem appellationis A B C. Et per Centrum D ducatur linea B D E, ſecans peripheriam in puncto E. Dico duos angulos A D E & C D E ſimul ſumptos duplos eſſe ad angulum A B C.



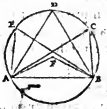
Id verò patet ex hac ipſa Decimanona. Nã A D E angulus ad Centrum, duplus eſt anguli A B D: quum ſint ſuper eandem peripheriam A E. Eadem ratione, C D E duplus eſt ipſius C B D. Quare duo anguli A D E & C D E ſimul ſumpti, dupli ſunt ad totum A B C angulum: Quod erat oſtendendum.

THEOREMA 18. PROPOSITIO XX.

Theoni 21.

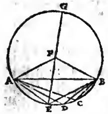
Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

In Circulo, qui in eodem ſegmento ſunt anguli, inter ſe ſunt æquales.



In ſegmento A D B, Circuli A B C D, cujus Centrum F, ſint anguli A C B, A D B, & A E B. Dico omnes eſſe æquales:

Connectatur A B. Ac tum ſi duæ linearum aliquæ ſe in Centro ſecent: erit manifeſta propoſitio ex antecedente. Erit enim angulus A F B, duplus ad vnumquemque illorum: quapropter, ex animi Notione, ipſi inter ſe æquales. Quòd ſi non ſe ſecuerint, tum ductis A B & B F, idem ſtatim innoteſcet.



Si verò fuerint in minori ſegmento, vt in A E B: tum connexis A F & B F: atque item ductis lineis ab vnoquoque angulorum, per Centrum ad peripheriam (hic verò ſatis fuerit duxiſſe E F G:) erit totum ſpatium circa angulum F, duplum ad vnumquemque illorum. Quare ipſi inter ſe æquales: Quod fuit demonſtrandum.

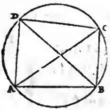
THEOREMA 19. PROPOSITIO XXI.

Theoni 22.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Quadrilaterorum in Circulis inſcriptorum, duo anguli inter ſe oppoſiti, duobus rectis ſunt æquales.

Sit Quadrilaterum A B C D, in Circulo ejuſdem deſignationis, A B C D inſcriptum. Dico binos quoſque angulos oppoſitos, duobus rectis eſſe æquales.



Ducantur in Quadrilatero duæ lineæ dimetiẽtes: A C & B D. Erunt q; per antecedentem, duo anguli A B D & A C D, qui in eodem ſegmento A B D, æquales. Duo itidem C B D & C A D, qui in eodem ſegmẽto B D C, æquales. Totus itaq; B angulus, duobus A C D & C A D æqualis. At duo ipſi A C D & C A D cum toto D, ſunt duobus rectis æquales, per trigeſimamſecundam Primi. Sunt igitur duo B & D, anguli oppoſiti, duobus rectis æquales.

Eadem argumentatione probabimus duos A & C oppoſitos, duobus rectis eſſe æquales.

THEOREMA 20. PROPOSITIO XXII.

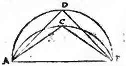
Theoni 23.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Super eadem recta linea, duæ Circulorum ſectio-

nes ſimiles inæquales ad eandem partem conſtitui nõ poſſunt.

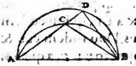
Sit recta linea A B, ſuper qua conſtituta ſit Sectio A C B: & ducantur rectæ A C & B C. Dico ſuper eadem A B non poſſe conſtitui ex eadem partę ſimilem Sectionem Circuli, inæqualem.



Si enim fieri poſſit, conſtituatur A D B Sectio major: Et ducantur rectæ A D & B D. Aut igitur neutra duarum A D & B D, neutram ſecabit duarum A C & B C. Ac tum erit angulus C major angulo D, per vigeſimamprimam Primi. Non igitur erunt ſectiones ſimiles, ex Definitione vltima hujus.



Quòd ſi altera harum, vt B D, ſecet alteram illarum vt A C, & peripheriam minorem in puncto E: connectatur E A. Eritque, per decimamſextam Primi, angulus A E B major angulo A D B, exterior interiori. Ob id & A C B, qui æqualis eſt A E B, per vigeſimam hujus, major eodem A D B. Quare nec ſic ſectiones ſimiles.



Si demùm altera illarum, vt A C, ſit pars alterius harum, vt ipſius A D: erit & per eandem decimamſextam Primi, angulus C major angulo D. Non igitur ſunt ſimiles Sectiones.

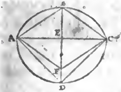
Ex his verò ſatis conſtat, minorem ſectionem ſuper A B conſtitui non poſſe ipſi A C B ſimilem. Quare nullo modo ſimiles inæquales Sectiones ſuper eadem linea conſtitui poſſunt: Quod erat demonſtrandum.

Hic ſubjecit Campanus: Super eadem recta linea, neqꝫ ad eandem partem, neque ad oppoſitam ſimiles Sectiones inęquales conſtitui poſſe. Quod ipſe probat ex ſuperpoſitione, quã vocant, Figurarum. Id verò alia ratione demonſtrabimus.

Sit Circuli portio A B C (ſeu ſectio, nihil facio diſcriminis) conſtituta ſuper A C linea. Ex altera verò parte conſtituatur portio A D C ſuper eadem A C, ipſi A B C ſimilis. Dico A B C & A D C ſic non poſſe eſſe inæquales. Sit enim, ſi poſſit, major

A D C:

A D C: & diuidatur A C biſariam in puncto E: & ducatur recta B E D, ſecans ad rectos angulos ipſam A C: Et connectantur A B, C B: A D, & C D.



Et quoniam major eſt A D C portio quàm A B C: major quoque erit perpendicularis E D quàm E B, vt præmonſtrauimus ad calcem Definitionum hujus Tertij. Reſecetur ergo E D ad æqualitatem E B: & ſit E F æqualis E B. Eritq; Triangulum A E B æquale Triangulo A E F, per quartam Primi: Et angulus E B A æqualis angulo E F A Ac ſimili ratione, per eandem, erit angulus E B C æqualis angulo E F C. Totus igitur A B C toti A F C, æqualis. Sed ipſe A F C, per vigeſimamprimam Primi, major eſt ipſo A D C. Igitur & A B C major quàm A D C. Quare à definitione, ipſæ A B C & A D C portiones, non ſimiles: Quod eſt contra poſitionem. Non ſunt igitur ſimiles & inæquales: Quod erat probandum.

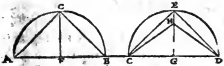
THEOREMA 21, PROPOSITIO XXIII.

Theoni 24.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί.

Super æqualibus rectis lineis, ſimiles Circulorum Sectiones conſtitutæ, inter ſe ſunt æquales.

Sint duæ lineæ A B & C D æquales: ac ſuper iiſdem conſtitutæ duæ A B C & C D E Sectiones ſimiles. Dico ipſas Sectiones eſſe æquales.

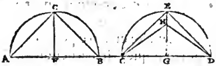


Siñ minus, Altera illarum alteri ſuperpoſitá, excedet major minorem. At linea A B eſt vna lineá cum C D. Vnde accidet contra præceptum antecedentis.

SED quia hanc Figurarum ſuperpoſitionem jandudum à Geometricis Demonſtrationibus explodendam eſſe cenſuimus: quamuis hoc Theorema nulla ferè alia probatione egeret, quàm antecedens: tamen hac ratione Geometricá demonſtrabimus.

Quoniam duæ A C B & C E D portiones, ſunt ſimiles, ſed non

non æquales: ſit major C E D. Et diuidantur duæ A B & C D lineæ



bifariã: A B quidem in F, & C D in G puncto: Et erigãtur duæ perpendiculares F C & G E. Et quia C E D portio, major eſt: erit quoque G E perpendicularis major: vt ad finem antecedentis aſtruximus. Secetur itaque G E in H, vt ſit G H æqualis F C. Et quoniam duo latera A F & F C, Trianguli A C F, ſunt æqualia duobus C G & G H, Trianguli C H G: & anguli F & G æquales: erit quoque baſis A C, baſi C H æqualis: & angulus A C F angulo C H G., per quartam Primi. Similiter erit angulus B C F, angulo D H G æqualis. Quapropter totus angulus A C B, toti angulo C H D æqualis. Sed C H D angulus, major eſt C E D angulo, per vigeſimamprimam Primi. Igitur & A C D angulus major C E D angulo. Quare Sectiones non ſunt ſimiles: Quod eſt contra poſitionem.

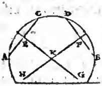
PROBLEMA 3. PROPOSITIO XXIIII.

Theoni 25.

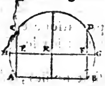
Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπερ ἐστὶ τμῆμα.

Circuli ſectione data, Circulum perficere cujus eſt ſectio.

Sit Sectio data A B, ex qua ſit perficiendus Circulus.



Ducam in ipſa duas lineas fortuitas A C & B D: quas diuidam bifariam: A C quidem in puncto E, & A D in puncto F. Tum à duobus punctis diuiſionum, ducam intra Sectionem duas perpendiculares E G & F H: quæ ſe ſcindant in puncto K. Eritq; Centrum Circuli in vtraque ipſarum, per Conſectarium primæ hujus. Igitur K Centrum: Quod erat inueſtigandum.

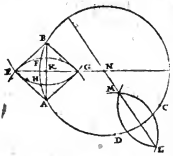


Si verò E G & F H non ſecent inter ſe, ſed ſint linea vna, vt G H, in ſecũda Figura: quod fit, quum duæ A C & B D ſunt æquidiſtãtes: tũc G H applicata ad vtramque partem peripheriæ datæ, capiet Centrum Circuli, per idem Conſe

Conſectarium. Neque enim æquidiſtantes eſſe poterunt E G & F H. Eſſent enim ejuſdem peripheriæ duo Centra.

HÆC eſt generalis Demonſtratio perficiendi Circuli quocumque arcu dato: quam & aſſcribit Campanus. Ex qua deprompta eſt ratio illa compendiaria Centri inueniendi, Artificibus vulgò vſitata.

Sit enim peripheria A B C D, cujus Centrum ſit reperiendum. Pono Centrum fortuitum in puncto aliquo datæ peripheriæ, vt in A: ſuper quod deſcribo peripheriam liberæ extenſionis, quæ ſit E F G. Tum in puncto altero peripheriæ, vt in B, poſito Centro, deſcribo peripheriam eodem interuallo quo priorem, E H G, quæ ſecet E F G priorem, in duobus punctis E & G. Duco poſtmodùm ab ipſis Centris, rectas A E & B E: itemq; A G & B G. Suntq; hæ quatuor poſtremæ lineæ æquales: quum ſint Semidiametri Circulorum æqualium.



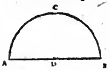
Tum duco A B rectam: Fientq; duo Triangula Iſoſcelia A E B & A G B: quorum baſis communis A B. Hãc igitur A B diuido bipartitò in puncto K: Quod omninò cadet intra duas peripherias E F G & E H G: ne ſit pars major toto. Et connecto E K: quam produco ad G punctum. Vides jam duo Iſoſcelia diuiſa eſſe in quatuor Triangula E A K, E B K: G A K & G B K æqualia. Duo enim latera A E & A K, Trianguli A E K, ſunt æqualia duobus B F & B K, Trianguli B E K: & baſis E K vtrique communis. Duo igitur anguli qui ad K, duorum Triangulorum A E K & B E K, per octauam Primi, ſunt æquales: ob idq;, recti. Eadem ratione erunt duo reliqui anguli qui ad K recti. Quapropter E G linea vna per decimamquartam Primi. Quæ quum diuidat A B ad angulos rectos: ipſa exit ad Centrum, per Conſectariũ primæ hujus. Atque eadem erit probatio duarum peripheriarum ſimiliter ductarum ac ſe ſcindentium in punctis L & M: è quibus educta linea L M ſecabit lineam E G in puncto N: Quod erit Centrum Circuli, per ipſum primæ hujus Conſectarium: intellectâ C D rectâ lineâ, ipſam L M ad angulos rectos ſecante: Quod erat probandum.

Digitized by Google

Hanc demonſtrationem appoſui, vt videret vnuſquiſque quantum compendij fieri poſſit eorum quæ in arte fusè docentur. Id verò totum à Quadrati cum Circulo commercio proficiſcitur. Triangula enim ad Quadrilaterorum probationem conferunt. Quadrilatera verò, ſed præcipuè Quadrata, ad Circulos accommodantur.

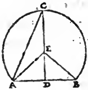
Vt hîc ſi intelligamus A E B G Quadratum: cujus vna Diameter A B peripheriam datam ſecat, altera E C, Centrum reſpicit. Sed hæc præter Demonſtrationem.

Quæ verò ſequuntur Demonſtrationes, hanc Euclidis vigeſimamquartam probant per capita: hoc eſt, ad nominatas Circulorum portiones ſingillatim pertinent: ſcilicet ad Semicirculum, portionesq; Semicirculo majores aut minores.



Primùm itaque Semicirculo dato, cujus ſit Centrum inueniendum: quia linea ipſum ſubtendens eſt Diameter: in ipſius puncto medio erit Centrum Circuli: quale hoc loco eſt punctum D in Diametro A B, Semicirculi A C B.

Sed ſit data portio Semicirculo major, vt A C B, cujus ſubtenſa A B. Diuido A B æqualiter in D puncto: à quo excito perpendicularem D C, quæ attingat peripheriam in C. Atque hæc tranſibit per Centrum, ex Conſectario primæ hujus. Tum connecto A C. Et quia angulus C A D major eſt angulo A C D, per

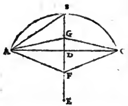


decimamnonam Primi, quum C D major ſit Semidiametro, & A D multò minor: reſcindo angulum C A E, æqualem angulo D C A: per vigeſimamtertiam Primi, ductâ lineâ A E, quæ ſecet D C in puncto E. Dico E Centrum eſſe Circuli.

Connecto E B. Et conſtat ex ſexta Primi, E C & E A eſſe æquales: quum duo anguli E A C & E C A ſint æquales: item per quartam eiuſdem, E A & E B eſſe æquales: quum duo latera A D & D E, Trianguli A E D, ſint æqualia duobus lateribus D B & D E, Trianguli D E B. Tres igitur E A, E B, & E C ſunt æquales. Quare, per ſextam hujus, erit E Centrum Circuli.

Iam verò detur A B C portio minor Semicirculo. Hujus ſubtenſam A C diuido æqualiter in puncto D. Et per ipſum D, duco ad angulos rectos lineam B D E: In qua quidem erit Centrũ

Circ



Circuli, per Conſectarium ſæpè citatum: ſed non inter puncta D B: eſſet enim A B C major Semicirculo, contra poſitionem. Connecto igitur B A:& ab A puncto duco lineam, quæ cum B A faciat angulum æqualem angulo A B F per vigeſimamtertiam Primi: ſitq; illa A F: ſcilicet angulus F A B ſit æqualis angulo F B A: (Neque enim cadet vt A G, inter D & B. Ducta enim G C, eſſent, ex ſexta & quarta Primi, tres G A, G B, & G C, æquales: eſſetq; G Centrum Circuli, per ſextam hujus, quod modò improbatum eſt.) Connecto itaque F C. Atque eadem, qua paulò antè argumentatione, erunt tres F A, F B, & F C æquales. Quare F Centrum Circuli: Quod erat demonſtrandum.

ATQVE ex inueniendi Centri Demonſtrationes, commendationem quandam habent varietatis, ſed vſum parum neceſſarium. Prima enim omnes abundè ſupplet.

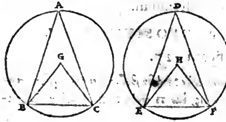
THEOREMA 22. PROPOSITIO XXV.

Theoni 26.

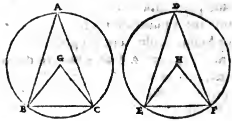
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς τ περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

In Circulis æqualibus, qui ad Centrum quiq; ad Peripheriam ſunt æquales anguli, ij ſuper æquos Arcus conſiſtunt.

Sint duo Circuli æquales: A B C, cujus Centrum G, & D E F, cujus Centrum H: ſintq; ad Centra duo anguli A G C & E H F æquales: aut ad Peripheriam duo B A C & E D F æquales. Dico Arcum B C æqualem eſſe Arcui E F.



Connectantur B C & E F. Et quoniam Circuli ſunt æquales: erunt G B & G C Semidiametri, æquales duabus H E & H F, per definitionem æqualium



lium Circulorum. Quapropter quum duo G & H anguli ſint æquales: erit, per quartam Primi, baſis B C, baſi E F æqualis. Quumq; angulus A ſit æqualis angulo D: erit Segmentum B A C ſimile Segmento E D F, per definitionem Similium portionum. Et quia ſuper æquales lineas conſiſtunt: ipſa erunt æqualia, per vigeſimamtertiam hujus. Quare, ex communi Notione, duo reliqui Arcus B C & E F ſunt æquales: Quod erat demonſtrandum.

COMMODIVS tamen probabimus ſeparatim, vt Campanus. Ponantur enim, vt priùs, duo anguli ad Centra, æquales. Ac tum connexis B C & E F, erunt, propter æqualitatem Semidiametrorum, ipſæ B C & E F æquales, per quartam Primi. Ducantur itaque B A & C A ad Peripheriam: itemq; E D & F D. Et erunt duo anguli A & D, per decimamnonam hujus & animi Notionem, æquales. Igitur, per definitionem Similium Segmentorum, erunt duo Segmenta B A C & E D F ſimilia: ob idq;, per vigeſimamtertiam hujus, æqualia: quum ſint ſuper æquales lineas. Quare duo reliqui Arcus B C & E F æquales: Quod eſt prius.

Iam verò ponantur A & D anguli ad Peripheriam, æquales. Et erunt, ex definitione, Segmenta æqualia. Ac tum ductis G B & G C: itemq; H E & H F: erunt ipſi G & H anguli, per decimamnonam hujus & animi Notionem, æquales. Et quia Semidiametri ſunt æquales: erunt, per quartam Primi, duæ B C & E F æquales. Erunt itaque, vt priùs, Segmenta B A C & E D F æqualia, per vigeſimamtertiam hujus. Quare duo reliqui Arcus æquales: Quod erat demonſtrandum.

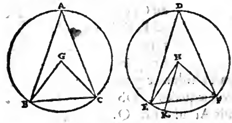
THEOREMA 23. PROPOSITIO XXVI.

Theoni 27.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

In Circ

In Circulis æqualibus, qui ſuper æquos Arcus conſiſtunt anguli, ſiue ad Centra, ſiue ad Peripherias conſiſtant, inter ſe ſunt æquales.



Sint duo Circuli æquales, A B C, cujus Centrum G: & D E F cujus Cētrum H: ſintq; duo anguli G & H ad Centra: vel duo A & D ad Peripheriam, ac ſuper duos Arcus æquales B C & E F. Dico angulum G, eſſe æqualem angulo H: & angulum A, angulo D. Hæc eſt Conuerſa antecedentis.

Si enim G non eſt æqualis H, ſit H major: fiatq; F H K æqualis ipſi G. Ac tum, ex antecedente, erit Arcus F K æqualis Arcui B C: Quapropter & Arcui E F, pars toti. Atque idem proueniet abſurdum, ſi poſitis B C & E F, Arcubus æqualibus, non fuerint A & D, anguli ad Peripheriam, æquales.

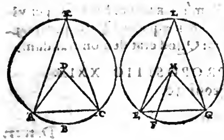
VEL ſic: Quum probati fuerint G & H anguli æquales, tum ductis B A & C A, itemq; E D & F D: erunt A & D anguli æquales ex decimanona hujus & animi Notione: Quod erat oſtendēdum.

THEOREMA 24. PROPOSITIO XXVII.

Theoni 28.

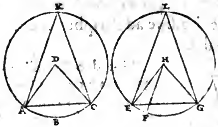
Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴ μὲ μείζονα, τῇ μείζονι, τὴ δὲ ἐλάττονα, τῇ ἐλάττονι.

In Circulis æqualibus, æquales rectæ lineæ æquos Arcus abſcindunt: & major linea, majorem Arcum: minor verò minorem.



Sint duo Circuli æquales: A B C, cujus Centrum D: & E F G, cujus Centrum H: Sitq; A C recta linea, æqualis E G rectæ lineæ. Dico duos Arcus A B C & E F G eſſe æquales.

 Quòd



Quòd ſi E G ſit major, majorem etiam eſſe Arcũ E F G.

Connectãtur A D & C D ad Centrum : vel A K & C K ad Peripheriam : ac ſimiliter E H, G H : & E L, & G L. Et quia Semidiametri vtrimque ſunt æquales, & baſes itidem æquales: erunt, per octauam Primi, duo anguli D & H æquales : Ob idq;, per antecedentem, Arcus A B C æqualis Arcui E F G : Quod eſt prius.

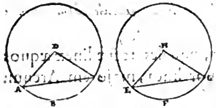
At ſi E G linea ponatur major: erit quoque angulus H major, per vigeſimamquintam Primi. Facto itaque angulo F H G æquali ipſi D : erit Arcus F G æqualis Arcui A B C, per vigeſimamquintam hujus. Major igitur E F G ipſo A B C : Quod erat probandum.

THEOREMA 25. PROPOSITIO XXVIII.

Theoni 29.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσι.

In Circulis æqualibus, ſub æquis Arcubus æquales rectæ lineæ ſubtenduntur.



Sint duo Circuli æquales : A B C, cujus Centrum D : & E F G, cujus Centrum H : ſitq; Arcus A B C æqualis Arcui E F G. Dico lineam A C eſſe æqualem lineæ E G. Conuerſa antecedentis.

Connectantur D A & D C : itemq; H E & H G. Eruntq;, per vigeſimamſextam hujus, anguli D & H æquales. Quare, per quartam Primi, erit A C æqualis E G : Quod erat demonſtrandum.

PROBLEMA 4. PROPOSITIO XXIX.

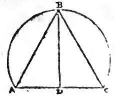
Theoni 30.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τέμνειν.

Datum

Datum Circuli Arcum bifariam diuidere.

Sit datus Arcus A B C, cujus ſubtenſa A C. Hunc volo bifariam diuidere.



Secetur A C æqualiter in puncto D. A quo erigatur perpendicularis D B, ſecans datum Arcum in B. Hanc dico eſſe quæ diuidit Arcum A B C per æqualia in puncto B.

Connectantur B A & B C: quæ, per quartam Primi, erunt æquales: Quapropter, ex priori parte vigeſimæſeptimæ hujus, erit Arcus A B æqualis Arcui B C: Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 16. PROPOSITIO XXX.

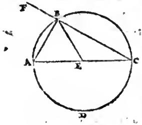
Theoni 31.

Ἐν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι, ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι, μείζων ὀρθῆς· καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

Qui in Semicirculo eſt angulus, rectus eſt: Qui verò in majori Segmento, minor recto: Et qui in minori, major. Sed angulus majoris Segmenti Mixtus, recto major: minoris autem, minor.

Sit in Circulo A B C D, cujus Centrum E, Diameterq; A C, Semicirculus A B C: in quo ſit angulus B rectilineus, ejuſdem deſignationis A B C. Dico hunc eſſe rectum.

Connectatur B cum Centro, ductâ lineâ E B. Eritq;, per quintam Primi, angulus A æqualis angulo E B A: & angulus E B C, angulo E C B: quapropter duo anguli qui ad B, æquales duobus angulis A & C. Atqui totus B angulus cum duobus A & C, ſunt duobus rectis æquales, per trigeſimamſecundam Primi. Quum igitur B ſit eorum dimidium: ipſe B eſt rectus.

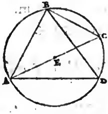


VEL, vt alij: Quia angulus C E B æqualis eſt duobus A & E B A, per priorem partem trigeſimæſecundæ Primi: ipſe erit duplus ad angulũ E B A: Itidem A E B duplus

duplus erit ad E B C. Duo igitur anguli qui ad E, dupli ſunt ad totum B. Quare B eſt dimidia pars duorum rectorum, ac propterea rectus.

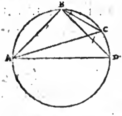
VEL rurſus ſic. Protrahatur C B ad F punctum. Et quia duo anguli qui ad B, Trianguli A B C ſunt æquales duobus A & C, per quintam Primi: & angulus A B F ijſdem A & C æqualis, per trigeſimamſecundam ejuſdem: erunt duo A B F & A B C æquales. Quare vterque rectus, per decimamquintam Primi.

Mira Diametri potentia: vt ſemper æqualis ſit duabus quas conjungit potentiis.



Sit deinde in Circulo A B C D, cujus Centrum E, portio A B D major Semicirculo: cujuſq; ſubtenſa recta A D: ſuper quam angulus rectilineus A B D. Hunc dico eſſe minorem recto.

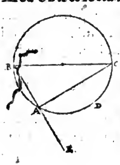
Sumatur Diameter A C: & connectatur B C. Et quia angulus A B C, vt modò oſtendimus, rectus eſt: erit, ex animi Notione, A B D angulus, minor recto.



Sed ſit portio A B C, cuius ſubtenſa A C, minor Semicirculo. Dico angulum A B C majorem eſſe recto.

Ducatur Diameter A D: & connectatur B D. Et erit, ex primo capite hujus, A B D (pars ipſius A B C) rectus. Quare A B C recto major.

Demùm in Circulo A B C D ſit portio A B C, cujus ſubtenſa A C, major Semicirculo: portio verò A D C, cujus ſubtenſa eadem A C, minor eodem. Dico angulum Mixtum, ſcilicet qui ab Arcu C B A & recta A C comprehenditur, majorem eſſe recto: ſed angulum ab Arcu C D A eademq; linea A C comprehenſum minorem eſſe recto.

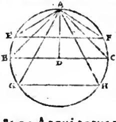


Ducatur Diameter B C: & producatur recta B A ad E punctum. Eritq; per primam partem hujuſce, angulus rectilineus B A C, rectus: Et per decimamtertiam Primi, angulus C A E rectus. Quare, quum angulus rectus ſit pars prioris: alter verò pars recti: erit

erit ille recto major, hic autem minor. Quod fuit probandum.

Sed & hanc Propoſitionem omni ex parte ſpectandam exhibuimus, ſub hac Deſcriptione:

Sit Circulus ABC, cujus Centrum D, Diameter verò BC. Atque in eo ponatur EAF portio Semicirculo minor: & GAH portio, eodem major: Et à punctis B, C: E, F: G, H, ducantur lineæ ad punctum A, vt in Schemate. Eritq; de angulo BAC



Demonſtratio eadem quam ſuprà dedimus: Ex qua cæterorum angulorum probationes erunt manifeſtæ.

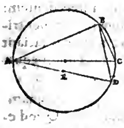
Quoniam enim duo anguli DAC & DCA ſunt æquales, per quintam Primi: itemq; duo DAB & DBA æquales, per eandem: erit totus BAC æqualis duobus B & C: Atqui totus BAC cum duobus B & C, ſunt duobus rectis æquales, per trigeſimamſecundam Primi. Totus igitur BAC rectus.

Hinc ſatis manifeſtum eſt, EAF angulum eſſe recto majorem: ſed GAH minorem eodem. Hincq; angulum Mixtum, qui fit ex linea recta AC & Arcu CHA, eſſe recto majorem: Angulum autem qui fit ex eadem AC & Arcu CFA, eſſe recto minorem: Quod fuit probandum.

Huic tanquam Conſectarium ſubijciemus,

Si in Circulo Triangulum Rectangulum inſcriptum fuerit: latus recto angulo oppoſitum, Diameter erit Circuli.

Sit enim in Circulo ABCD, Triangulũ ABC Rectangulum, cujus angulus B rectus. Dico latus AC eſſe Diametrum Circuli.



Sin aliter: erit Centrum extra AC vt in puncto E. Et connectatur AE: quæ educatur ad punctum D Peripheriæ, oppoſitum: ſitq; AED Diameter: & connectatur BD. Tunc angulus ABD, per hanc trigeſimam, erit rectus: ſicq; æqualis angulo ABC, pars toti: Quod eſt abſurdum. Sed nec alibi erit Centrum, quàm in AC. Eſt igitur AC Diameter: Quod erat probandum.

Digitized by Google

THEOREMA 27. PROPOSITIO XXXI.

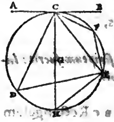
Theoni 32.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον· ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Si Circulum tetigerit recta linea, à contactu autem exiens altera linea, Circulum ſecuerit: anguli, quos cum tangente efficit, æquales ſunt alternatim duobus, qui in Circuli Segmentis ſunt, angulis.

Sit linea A B, tangens in puncto C Circulum C D E F, cujus Centrum G. Et à puncto C ducatur linea C E, ſecans Circulum: fiatq; ſuper C D E portione, angulus D, ductis lineis C D & C E: Itemq; angulus F ſuper portione C F E, ductis C F & E F. Dico angulum E C B eſſe æqualem angulo D: angulum verò E C A, æqualem angulo E F C.

Ducatur Diameter C G H: & connectatur E H. Eritq;, per decimamſeptimam hujus, C H perpendicularis ipſi A B: Et, per primam partem antecedentis, angulus C E H rectus: ob idq;, angulo A C H æqualis. Poſito itaque communi E C H, erit angulus A C E, duobus C E H & E C H æqualis. At hi duo cum angulo H, per trigeſimamſecundam Primi, duobus rectis ſunt æquales: Et, per decimamtertiam ejuſdem, angulus A C E cum angulo B C E, duobus rectis ſunt æquales. Angulus igitur B C F angulo H æqualis: ob id, & angulo D, per vigeſimam hujus: quum ſint in vna portione Circuli.



VEL breuius. Angulus C E H eſt rectus, per antecedentem: quapropter duo anguli H & E C H faciunt vnum rectum per trigeſimamſecundam Primi. Quum igitur B C E & E C H faciant vnum rectum, dempto communi E C H, erit B C E ipſi H æqualis: Quare & ipſi D, per vigeſimam hujus: Quod eſt prius.

Quumq; D & F ſint duobus rectis æquales, per vigeſimamprimam hujus: erit angulus F æqualis angulo A C E: Quod erat probandum.

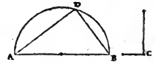
Vel ſic, angulus A C E cum angulo H ſunt duobus rectis æquales, vt oſtendimus: & E C B cum H itidem duobus rectis æquales, per vigeſimamprimam hujus: quorum B C E eſt ipſi H æqualis. Angulus igitur E ipſi A C E eſt æqualis: Quod erat demonſtrandum.

PROBLEMA 5. PROPOSITIO XXXII.

Theoni 33.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

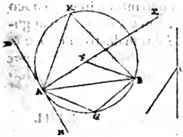
Super data linea Sectionem Circuli deſcribere, quæ capiat angulum angulo dato æqualem.



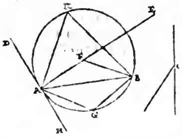
Sit linea data A B: datus verò angulus C. Volo ſuper linea A B deſcribere Circuli Sectionem quæ capiat angulum æqualem angulo C.

Ac primùm, ſi fuerit angulus C rectus, deſcripto Semicirculo A D B ſuper linea A B, ductiſq; A D & B D: erit angulus D rectus, per primam partem trigeſimæ hujus.

Si verò fuerit obtuſus, ducam lineã D A, facientem cum A B, angulum D A B, æqualem angulo C obtuſo, per vigeſimamtertiam Primi. Et à puncto A, ducam ſuper A D, perpendicularem A E interminatam. Tum à puncto B, verſus A E ducam lineam B F, ſecantem A E in puncto F: quæq; cum A B conſtituat angulum A B F, æqualem angulo E A B, quo obtuſus rectum ſuperat.



Eruntq;, per ſextam Primi, A F & F B æquales. Poſito itaque puncto F Centro deſcribo, ſecũdùm ſpatium F A & F B, Circulum A G B A. Et per Cõſectarium decimæquintæ hujus, linea D A tanget Circulum. Duco itaque A G & B G, conſtituentes angulum G: qui, per antecedentem, erit æqualis angulo D A B: quapropter angulo C obtuſo.



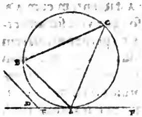
Iam verò, ſi angulus C fuerit acutus: ducam A H lineam, quæ contineat cum A B angulū H A D æqualem angulo C acuto. Tum à puncto A, ductâ perpendiculari A E, facio angulum A B F æqualem angulo B A E, quo rectus ſuperat acutum: vt B F ſecet A E in F puncto. Ac tum, vt in ſuperiori ſchemate, erunt F A & F B æquales, per ſextam Primi: eritq; F Centrum Circuli deſcribendi. Inde ductis ad majorem portionem lineis A K & B K: erit angulus K, per antecedentem, æqualis angulo B A H: Quare & angulo C dato: Quod erat faciendum.

PROBLEMA 6, PROPOSITIO XXXIII.

Theoni 34.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

A dato Circulo ſegmentum abſcindere, capiens angulum dato angulo rectilineo æqualem.



Sit Circulus datus A B C, datus verò angulus D. Volo à Circulo A B C abſcindere ſegmentum, capiens angulum æqualem angulo D.

Duco lineam E F, quæ per decimamſeptimam hujus, tangat Circulum in A puncto: A quo intra Circulum duco lineam A B, quæ cum A E faciat angulum E A B æqualem angulo D, per vigeſimamtertiam Primi. Ac tum ductis lineis A C & B C, erit angulus C in ſegmento A C B, æqualis angulo E A B, per trigeſimamprimam hujus: quare & angulo D dato: Quod fuit faciendum.

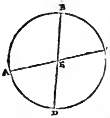
THEOREMA 29, PROPOSITIO XXXIIII.

Theoni 35.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτ

τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

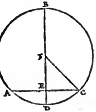
Si in Circulo duæ rectæ lineæ ſe inuicem ſecuerint: quod fit, ex ſegmentis vnius, Rectangulum, æquum eſt ei, quod ex alterius ſegmentis fit, Rectangulo.



Sint in Circulo A B C D, duæ lineæ A C & B D, ſecantes ſe in puncto E. Dico id quod fit ex A E in E C, æquum eſſe ei quod fit ex B E in E D.

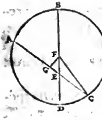
Aut igitur vtraque tranſit per Centrum, aut altera tantùm, aut neutra.

Si enim vtraque ſit Diameter Circuli: erit E Centrum, & quatuor ſegmenta æqualia: ſicq; conſtabit propoſitio.



Si verò altera tantùm tranſeat per Centrum, vt B F D: aut ipſa ſecabit A C æqualiter, aut inæqualiter. Quòd ſi æqualiter: ſecabit & ad rectos angulos, per priorem partem tertiæ hujus: Tum ducatur F C. Et erit, per quintam Secundi, quod fit ex B E in E D cum Quadrato E F, æquale Quadrato F D: vnde & Quadrato F C: ob idq;, duobus Quadratis E F & E C, per quadrageſimamſeptimam Primi. Dempto igitur vtrimque Quadrato E F: erit quod fit ex B E in E D, æquale Quadrato E C. Quare & ei quod fit ex A E in E C, quum ipſæ ſint æquales: Quod erat probandum.

At ſi B D tranſiens per Centrum, ſecet A C inæqualiter: A Centro F ducatur F G perpendicularis ipſi A C: Et connectatur F C. Eritq;, per quintã Secundi, quod fit ex B E in E D cum Quadrato E F (ob idq;, per quadrageſimamſeptimam Primi, cum Quadratis F G & E G) æquale Quadrato F D: atq; ob id, Quadrato F C: ob idq;, duobus Quadratis F G & G C. Ablato ergo vtrimque Quadrato F G: erit quod fit ex B E in E D cum Quadrato G E, æquale Quadrato

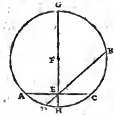


G C. At, per quintam Secundi, quod fit ex A E in E C cum Quadrato G E, æquale eſt Quadrato G C. Ablato igitur vtrimque Quadrato G E, erit quod fit ex B E in E D, æquale ei quod fit ex A E in E C: Quod erat probandum.

QVONIAM verò hæc Demonſtratio ex iis eſt quæ non expeditè capiuntur: qui in ſimiles incidet, ſtudeat ipſas in ſuos articulos diuidere. Verbi gratiâ, in hoc poſtremo ſchemate ſic ratiocinetur. Quod fit ex B E in E D cum Quadrato E F, æquale eſt ei quod fit ex A E in E C cum eodem Quadrato E F. Quod igitur fit ex B E in E D, æquale eſt, per animi Notionem, ei quod fit ex A E in E C. Aſſumptio ſic probatur. Quod fit ex A E in E C cum duobus Quadratis G E & G F (hoc eſt cum Quadrato E F) eſt æquale duobus Quadratis G C & G F, per quintam Secundi & animi Notionem: ob idq; Quadrato F C. Sed quod fit ex B E in E D cum eodem Quadrato E F, probatum eſt æquale Quadrato F C. Quod igitur fit ex B E in E D cum Quadrato E F, æquale eſt ei quod fit ex A B in E C cum eodem Quadrato E F. Probata Aſſumptione, conſequitur, vt ablato cõmuni Quadrato E F, maneat id quod fit ex B E in E D, æquale ei quod fit ex A E in E C: Quod fuerat demonſtrandum.

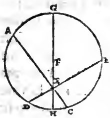


Iam verò, vt ad Propoſitionem reuertamur, ſi neutra linearum tranſeat per Centrum, ſiue æqualiter, ſiue inæqualiter ſe diuiſerint: per punctum ſectionis E ducam Diametrum G H, in qua Centrum F. Ac tum, ſi altera illarum diuidatur æqualiter, vt A C ab ipſa B D: diuidetur quoque ipſa A C æqualiter à Diametro G H: idq;, per tertiam hujus, ad angulos rectos. Quapropter, ex ſecunda ſpecie hujuſce Propoſitionis, quod fit ex G E in E H, æquũ eſt ei quod fit ex B E in E D. Quod igitur fit ex A E in E C, æquũ eſt ei quod fit ex B E in E D: Quod erat probandum.



At ſi neutra alteram æqualiter diuidat: erit, ex tertia ſpecie, quod fit ex G E in E H, æquale ei quod fit ex A E in E C: & æquale ei quod fit ex B D in E D. Quare vtrumque æquale alteri.

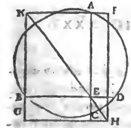
teri. Ac ſic conſtat ex omni parte Propoſitio.



INTER eas quæ hoc Tertio libro demonſtrantur Propoſitiones, hæc certè vna eſt ex præcipuis. Vſum enim habet variis modis notabilem. In quam commentari pro dignitate longum eſſet. Capita igitur tantummodo aliqua ſeligemus, vt ex iis ad alia meditanda viam aperiamus.

Primùm itaque ex hac intueri licet Circuli vim & auctoritatem. Qui quum lineas in Centro ſe ſcindentes, atque ex his producta æqualia, nempè Quadratas Figuras, in æqualitate contineat: idem juris etiam retinet in reliquorum punctorum decuſſationibus. Nam quocunque in loco ſeſe ſcindant lineæ: partes ſemper æqualia producta faciunt, vt modò oſtendimus. Atque ex hoc multa in Geometriam diſperſa ſunt Theoremata & Problemata. Imprimis vltima propoſitio Secundi, quæ dato Rectangulo æquale Quadratum componit. Si enim attentè inſpexerimus ſecundam, quam in hac deſcripſimus, ſpeciem: intelligemus Rectangulum compoſitum ex duobus lateribus BE & ED: quæ in vnam lineam continuamus, qualis eſt BD; atque ex hac facimus Diametrum Circuli: & ex puncto diuiſionis E, perpendicularem ducimus ad peripheriam, qualis hoc loco EA: quæ continuata ad punctum oppoſitum C, conſtituit AC lineam, bipartitò diuiſam in E: ob idq., quod fit ex AE in EC, eſt Quadratum: & æquale ei, quod ex BE in ED fit, Rectangulo.

Ex hac etiam deprompta eſt quadrageſimatertia Primi, quàm Gnomonicam vocauimus.

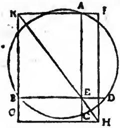


Sint enim in Circulo ABCD, duæ lineæ AC & BD, ſe ſcindentes in puncto E: ſitq; quod fit ex AE in EC, Rectãgulum AEDF: quod verò ex BE in ED, ſit Rectangulum EBGC: commutatis partibus EC & ED, vt vides.

Quum itaque hæc duo Rectangula, in ſolo puncto E juncta ſint, & nutare quodammodo videantur: ea connectenda fuerunt, & ſtabilienda.

Quod

Quod firmiùs fieri non poterat, quàm perfecto Parallelogrammo F H G K, ductaq; Diametro H K. Ac tum duo Supplementa



E F & E G apparent æqualia. In quo mira quædam rerum colligatio & conſecutio ſeſe offert expendendam. Quod nos præterire cogimur, aliò properantes. Id vnum tamen dicemus, lineam G H tanto ſpatio egredi Circulum, quanto K F eundem ingreditur. Et Diametrum H K tanto diſtare à Centro Circuli, quantum duo Parallelogramma H E & E K abſunt à Quadratis. Si enim Quadrata eſſent, nempè ſi fuiſſent E C & E D æquales: totum F G Quadratum eſſet, Circulo circumſcriptum: ipſiusq; Diameter H K, eadem cum Circuli Diametro.

Hinc quoque deſumptum eſt, vt ſuper data linea, dato Rectangulo æquale Rectangulum conſtitueretur. Hìc enim ſuper linea B E, quam pro data ſumimus, conſtituitur Rectangulum E G: æquale Rectangulo E F: Quod etiam pro dato ſumitur.

Ex hac etiam facilè habetur exceſſus Parallelogrammi majoris ſupra minus. Quid multa? ex hoc Theoremate innumerabiles conſiderationes, velut ex fonte quodam, emanant: quę ad Proportiones pertinent. Quas, quum illûc ventum erit, poterit ſibi Lector effingere, ex hujus Propoſitionis recordatione.

Neque miretur quiſquam, quòd priora cum poſterioribus retexam. Id enim ad Demonſtrationes eruendas tantùm facio. Nam aliud eſt, artem tenere: aliudq;, artem docere. Multáque priora ſunt naturâ, quæ ars cogitur poſteriora tradere: atque econtrariò: nempè aut compendij faciendi, aut lucis addendæ, aut denique methodi obſeruandæ gratia.

THEOREMA 30, PROPOSITIO XXXV.

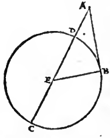
Theoni 36.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται· ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

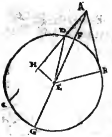
Si à

Si à puncto extra Circulum ſignato duæ lineæ ductæ fuerint, quarum altera ſecet Circulum, altera tangat: quod ex tota ſecante in partem ſui extimam fit Rectangulum, æquum eſt ei, quod ex tangente fit, Quadrato.

Sit punctum A, ſignatum extra Circulum B C D, cujus Centrum E: ducanturq; duæ lineæ A D C quidem Circulum ſecans in D puncto: & A B eundem tangens in B. Dico id quod fit ex tota A C in partem A D, eſſe æquale Quadrato A B.



Aut enim A D C tranſit per Centrum, aut non tranſit. Si tranſit: ducatur à Centro E ad punctum contactus B, linea E B: Quæ, per decimamſeptimam hujus, erit perpendicularis ipſi A B. Et quoniam linea D C diuiſa eſt per æqualia in puncto E, additurq; ei linea D A: erit, per ſextam Secundi, quod fit ex tota A C in partem A D cum Quadrato E D (ob idq; ,cum Quadrato E B) æquale Quadrato A E: atque ob id, Quadratis duarum A B & E B. Dempto igitur communi Quadrato E B: erit quod fit ex A C in A D, æquale Quadrato A B: Quod erat probandum.



Si verò A C non tranſit per Centrum, ducatur A F E G per Centrum E: Et connectatur E D: Ducaturq; E H perpendicularis ad A C. Et erit D H æqualis H C, per tertiam hujus. Itaque, per ſextam Secundi modò inductam, quod fit ex A C in D C cum Quadrato D H, æquale eſt Quadrato A H. Commune addatur Quadratum H E: Erit quod fit ex A C in D C cum duobus Quadratis D H & H E (ob idq;, per quadrageſimamſeptimam Primi, cum Quadrato E F, nam id ſumo loco E D) æquale duobus A H & H E Quadratis: ob idq;, Quadrato A E, per eandem quadrageſimamſeptimam. At quod fit ex A G in F G cum ipſo F F Quadrato, æquale eſt eidem Quadrato A E. Quod igitur fit ex A C in A D cum Quadrato E F, æquale eſt ei quod ex A G in F G cum eo-

 dem

dem E F Quadrato. Ablato itaque communi E F, erit quod fit ex A C in D C æquale ei quod ex A F in F G: Quare & Quadrato A B, vt modò probauimus: Quod fuit demonſtrandum.

Conſectaria ex Campano.

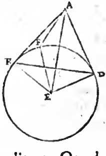
Si ab eodem puncto extra Circulum ſignato, plures lineæ Circulum ſecent: quæ ex vnaquaque in ſui partem extimam fiunt Rectangula, inter ſe ſunt æqualia.

Hoc autem ex eo manifeſtum eſt, quòd ſingula hujuſmodi Rectangula ſint æqualia Quadrato lineæ ab illo puncto ductæ ad contactum Circuli, per hanc trigeſimamquintam. Ex hoc etiam addit,

Si duæ lineæ ab eodem puncto ductæ Circulum tangant, ipſæ inter ſe ſunt æquales.

Quod quamuis Demonſtratione non egeat, quum vtraque ſit æqualis ei quod fit ex linea, quæ ab eodem puncto educta Circulum ſecat in ſui partem extimam: ipſe tamen ſic probat:

Sit punctum A extra Circulum B C D, cujus Centrum E: ducanturq; duæ lineæ A B & A D, quæ Circulum tangant in punctis B & D. Dico ipſas eſſe æquales.



Ducam lineas E B & E D. Eritq; per decimamſeptimam hujus, vterque angulorum B & D rectus: quapropter Quadratum A E, per quadrageſimamſeptimam Primi, æquale duobus Quadratis A B & E B: ſimiliter & duobus A D & E D. Igitur duo A B & E B Quadrata, ſunt æqualia duobus A D & E D Quadratis. Et quia E B & E D ſunt æqualia: erunt duo reliqua A B & A D æqualia. Quare A B æqualis A D: Quod erat oſtendendum.

Idem rurſus. Connectatur linea B D. Eritq;, per quintam Primi, angulus E B D æqualis angulo E D B. Et quia duo A B E & A D E anguli ſunt æquales, nempè recti: ablatis æqualibus E B D & E D B, erunt duo A B D & A D B æquales. Quare per ſextam

ſextam Primi, erit A B ipſi A D æqualis.

Nos etiam hæc addemus.

A puncto extra Circulum ſignato, duæ tantùm lineæ ad contactum Circuli deduci poſſunt.

Stante poſtrema deſcriptione, à puncto A in Circulum B C D dico non poſſe demitti plures contingentes, quàm duas A B & A D.

Quòd ſi fieri poſſit, educatur A F, contingens Circulum in puncto F: & connectatur E F. Eritq; angulus F rectus, per decimamſeptimam hujus: quapropter æqualis angulo E B A, repugnante vigeſima Primi.

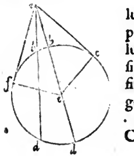
Id etiam ea ratione probabitur: quòd omnes lineæ ab vno puncto ductæ, Circulum tangentes, ſint æquales: vt antè oſtendimus. At duæ A B & A F æquales eſſe non poſſunt, aduerſante octaua hujus.

THEOREMA 31. PROPOSITIO XXXVI.

Theoni 37.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ· ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τεμνούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης· ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

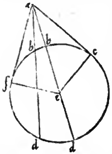
Si à puncto extra Circulum ſignato, duæ lineæ in Circulum ceciderint, quarum altera ipſum ſecet, altera ei applicetur: ſit autem quod ex tota ſecante in ſui partem extimam fit Rectangulum, æquale ei quod ex applicata fit Quadrato: Applicata Circulum tangit.



Sit punctum A, ſignatum extra Circulum B C D, cujus Centrum E: cadantq; ab A puncto duæ lineæ, A B D quidem Circulum ſecans, & A C ipſi Circulo applicata: ſitq; quod fit ex A D in A B, æquale ei quod fit ex A C Quadrato. Dico lineam A C tangere Circulum. Conuerſa antecedentis.

Primùm enim ſi linea A B D tranſit per Centrum, ducatur recta C E. Et erit, per

ſextam Secundi, quod fit ex A D in A B cum Quadrato E B, ob idq;, cum Quadrato E C, æquale Quadrato A E. At quod fit ex A D in A B, ponitur æquale Quadrato A C. Et Quadratum igitur A C cum Quadrato C E, æquale eſt Quadrato A E. Igitur, per vltimam Primi, angulus C rectus. Quare, per decimamquintam hujus, linea A C contingit Circulum.



Quod ſi A B D non tranſit per Centrum, ducatur à puncto A, linea A D, in qua Centrum E. Et quia quod fit ex hac tota in ſui partem extimam, æquum eſt ei quod fit ex A D in A B, per antecedentem: erit idipſum, ex communi Notione, æquale Quadrato A C. Quapropter E C A angulus, rectus eſt: ex iis quæ modò probauimus: Ob idq;, A C contingens Circulum: Quod erat demonſtrandum.

ALITER. Maneat jam inducta deſcriptio: atque inſuper à puncto A ad alteram partem Circuli demittatur A F, per decimamſextam hujus, contingens Circulum. Et connectatur E F. Eritq; angulus F rectus, per decimamſeptimam: Et, per antecedentem, quod fit ex A D in A B, æquale Quadrato A F. At, ex hypotheſi, idipſum eſt æquale Quadrato A C. Eſt igitur A C linea æqualis A F. Quapropter, quum duo latera A F & E F, Triãguli A E F, ſint æqualia duobus A C & E C, Trianguli A E C: & baſis A E vtrique communis: ſitq; angulus F rectus: erit & angulus C rectus, per octauam Primi. Quare A C tangit Circulum, per Conſectarium decimæquintæ hujus: Quod erat demonſtrandum.

Libri tertii Geometricorum Elementorum Finis.

IACOBI PELETARII CENOM. IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA

Demonſtrationum Liber quartus.

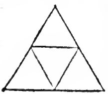
DEFINITIONES.

Χῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν, ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

Figura Rectilinea, in altera Rectilinea inſcribi dicitur, quum ſinguli inſcriptæ Figuræ anguli, ſingula ejus, in qua inſcribitur, latera tangunt.

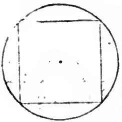
Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου, ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

2 Figura verò circa Figuram, quum ſingula latera circumſcriptæ, ſingulos ejus, circa quam deſcribitur, angulos tangunt.



Satis conſtat Rectilineas Figuras eiuſdem ſpeciei, alias aliis inſcribi aut circumſcribi: vt Triangulum Triangulo: Quadrilaterũ Quadrilatero: non diuerſæ. Si enim plures ſint anguli vnius, quàm latera alterius, aut contrà: non erit mutuus contactus ſingulorum, vt oportet.

Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

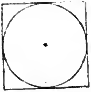


3 Figura Rectilinea in Circulo deſcribi dicitur, quum omnes ipſius anguli, Peripheriam tangunt.

Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται.

4 Circulus verò circa Figuram Rectilineam, quum ipſius Peripheria omnes interioris Figurę angulos tangit.

Κύκλος δὲ ὁμοίως εἰς σχῆμα λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

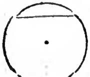


5 Circulus in Figura Rectilinea deſcribi dicitur, quũ ipſius Peripheria ſingula interioris Figuræ latera tangit.

Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

6 Figura verò Rectilinea circa Circulum, quum ipſius ſingula latera, Circuli Peripheriam tangunt.

Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.



7 Recta linea in Circulo accommodari dicitur, quum ipſius extrema in Circuli Peripheriam cadunt.

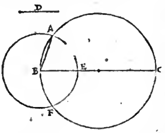
PROBLEMA PRIMUM,

PROPOSITIO PRIMA.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

In dato Circulo, datæ lineæ rectæ, quæ Circuli Diametro minimè major exiſtat, æquam lineam rectam accommodare.

Sit datus Circulus A B C, cujus Diameter B C: data verò linea D, quæ major non ſit ipſa B C. Volo in Circulo A B C aptare lineam, lineæ D æqualem.



Si D eſt ipſi B C æqualis, conſtat propoſitio. Sin minor, abſcindatur ex B C, pars B E æqualis ipſi D: & ſecundùm ſpatium B E, deſcribatur Circulus A B F A, ſecans Circulum A B C in punctis A & F. Et connectatur A B: quæ, per ſecundam Tertij, ſecat Circulum A B C A: eſtq; ipſi B E æqualis, ex definitione Centri: Quare & ipſi D lineæ æqualis: Quod erat faciendum.

ETIAM nulla Diametro poſita, aptabitur linea. Tantùm in puncto Peripheriæ fortuito, ponatur Centrum: ac ſecundum longitudinem lineæ datæ deſcribatur alter Circulus, datum Circulum ſecans.

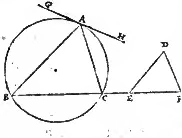
PROBLEMA 2, PROPOSITIO II.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

In dato Circulo, Triangulum dato Triangulo æquiangulum deſcribere.

Sit

Sit datus Circulus A B C, datum verò Triangulum, D E F. Volo in Circulo A B C deſcribere Triangulum, Triangulo D E F æquiangulum.



Per punctum A duco G H, quæ tangat Circulum in ipſo A, per decimamſextam Tertij. Et duco rectam A B in Circulum, quæ cum G A faciat angulum B A G, æqualem angulo F: itemq; ducta A C, facio angulum C A H æqualem angulo E: Et connecto B C. Dico A B C Triangulum eſſe Triangulo D E F æquiangulum.

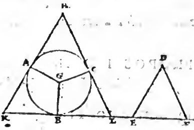
Eſt enim angulus B, per trigeſimamprimam Tertij, æqualis angulo C A H: ob id, & angulo E. Eadem ratione angulus C æqualis eſt angulo B A G: ob id, & angulo F. Reliquus igitur B A C, per trigeſimamſecundam Primi, reliquo D æqualis. Quare Triangulum B A C, ipſi D E F æquiangulum: Quod faciendum fuit.

PROBLEMA 3. PROPOSITIO III.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Circa datum Circulum, dato Triangulo æquiangulum Triangulum deſcribere.

Sit datus Circulus A B C, datum verò Triangulum D E F. Volo ipſi A B C Circulo circumſcribere Triangulum, ipſi D E F Triangulo æquiangulum.



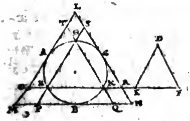
Protraham baſin E F vtrimq;, vt fiant duo extrinſecùs anguli E & F. Tum à Centro Circuli, quod ſit G, educam G B ad Peripheriã: Et ab eodem G puncto educta G A, conſtituam angulum B G A, æqualem angulo E exteriori. Similiter educta G C, faciam B G C angulum, æqual

æqualem angulo F exteriori. Tum per puncta A, B, & C ducam lineas HK, HL & KL, ad rectos angulos cum Semidiametris AG, BG, & CG. Atque harum vnaquæque, per decimamquintam Tertij, tanget Circulum: Et protractæ, omninò concurrent, vt in punctis H, K, L: Quum enim vterque angulorum qui eſt ad A, & vterque qui ad B, ſit rectus: linea quæ ducetur ab A ad B, efficiet cum HK & LK, duos angulos verſùs K, minores duobus rectis (quia vterque pars recti). Itaque, per quintam Petitionem, concurrent HK & LK. Atque eadem ratione concurrent HK & KL: quum vterque angulorum qui ad C, ſit rectus: fietq; Triangulum HKL. Quod dico eſſe æquiangulum Triangulo DEF.

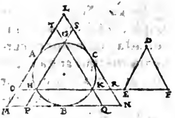
Quoniam enim in Quadrilatero AGBK, duo anguli A & B ſunt recti: erunt duo reliqui G & K, duobus rectis æquales: ſunt enim cujuſlibet Quadrilateri quatuor anguli quatuor rectis æquales: vt oſtenſum eſt ad trigeſimamſecundam Primi. Atqui duo anguli qui ad E, ſunt duobus rectis æquales, per decimamtertiam Primi. Quum igitur angulus G poſitus ſit æqualis angulo E exteriori: erit angulus K, æqualis angulo E interiori. Eadem ratione erit angulus L æqualis angulo F interiori. Quare, per trigeſimamſecundam Primi, reliquus H reliquo D æqualis. Et totum Triãgulum toti Triangulo æquiangulum: Quod erat probandum.

ALITER. Sit, vt priùs, Circulo ABC Triangulum circumſcribendum, Triangulo DEF æquiangulum.

In ipſo ABC Circulo, inſcribo Triangulum GHK, ipſi DEF æquiangulum, per antecedentem: vt ſit angulus G æqualis angulo D: angulus H, angulo E: & angulus K, angulo F. Duco poſtmodùm LM parallelum ipſi GH: quæ tangat Circulum in puncto A: per ea quæ addidimus ad decimamſextam Tertij.



Duco ſimiliter MN parallelum ipſi HK, & contingentem Circulum in B: itemq; LN parallelum ipſi GK, contingentem Circulum in C. Atque hæ tres lineæ omninò concurrent, vt ad puncta L, M, & N: quod patebit productis vtrimque lineis GH, GK, &



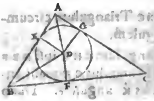
H K, donec ſecent L M, L N, & M N in punctis O, P, Q, R, S, T. Dico jam L M N Triangulum Circulo G H K circumſcriptum, eſſe æquiangulum Triangulo D E F. Eſt enim euidenter æquiangulum Triangulo G H K, per legem parallelorum: quum angulus M T Q ſit æqualis angulo G, Trianguli G H K, ex vigeſimanona Primi: ob id, & angulus L eidem G æqualis, per eandem. Sic & angulus M, angulo H ejuſdem Trianguli: & angulus N, angulo K. Totum igitur L M N Triangulum, toti G H K Triangulo æquiangulum: quapropter & ipſi D E F: Quod erat faciendum.

HÆC conſtructio ex iis eſt, quæ licet tædioſæ videantur, tamen ob concinnitatem faciles ſunt. Vnica etiam Propoſitione, nempè vigeſimanona Tertij, probatur.

PROBLEMA 4. PROPOSITIO IIII.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

In dato Triangulo Circulum deſcribere.



Sit datum Triangulum A B C, in quo deſcribendus ſit Circulus Diuido duos ipſius angulos A & B æqualiter, per nonam Primi, ductis lineis A D & B D: quæ concurrent intra Triangulum in puncto D. A quo ad tria latera ipſius A B C Trianguli, ducam tres perpendiculares D E, D F, & D G.

Et quoniam duorum Triangulorum A E D & A G D, duo anguli qui ad A, ſunt æquales, duoq; anguli E & G recti, & latus A D commune: erit, per vigeſimamſextam Primi, linea D E æqualis lineæ D G. Rurſus, quum duorum Triangulorum B E D & B F D, duo anguli qui ad B, ſint æquales, anguliq; E & F recti, & latus B D commune: erit, per eandem, linea D E æqualis lineæ D F. Quapropter tres lineæ D E, D F, & D G, æquales. Poſito itaq; Centro in D, Circulus deſcriptus ſecundùm cujuſcumque ipſarum interuallum, tranſibit per extremitates reliquarum duarum,

rum, ex nona Tertij. Et quia, per Conſectarium decimæquintæ ejuſdem, vnaquæque linearum A B, A C, & B C tangit Circulum, quia perpendicularis ad extremum Semidiametri: conſtat Propoſitio.

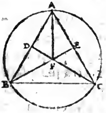
PROBLÉMA 5, PROPOSITIO V.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον, κύκλον περιγράψαι.

Circa datum Triangulum, Circulum deſcribere.

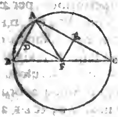
Sit datum Triangulum A B C, circa quod deſcribendus ſit Circulus.

Duo ipſius latera diuido æqualiter: A B quidem in puncto D, & A C in puncto E. Tum excito perpendiculares ab ipſis D & E punctis: quæ protractæ concurrent, vt ad punctum F. Nam ſi intelligatur duci linea D E ab angulis rectis D & E: ipſa efficiet angulos verſus F, minores duobus rectis.

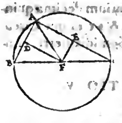


A puncto itaque concurſus F, quod dico eſſe Centrum Circuli, duco ad tres angulos Trianguli A, B, C: lineas F A, F B & F C. Quumq; duo latera A D & D F, Trianguli A D F, ſint æqualia duobus lateribus B D & D F, Trianguli B D F: & angulus D vnius, æqualis angulo D alterius, nempè vterque rectus: erit, per quartam Primi, F A æqualis F B. Eadem ratione, comparato A E F Triangulo cum C E F: erit eadem F A æqualis ipſi F C. Tres igitur F A, F B & F C æquales. Quare, per nonam Tertij, erit F Cẽtrum Circuli: Quod erat conſtitutum.

HÆC eſt in vniuerſum Circuli Triangulo circumſcribendi conſtructio. Sed nominatis Triangulorum ſpeciebus, ſic erit faciendum.



Ac primùm, ſit Triangulum A B C Rectangulum, cujus angulus A rectus. Diuido latus B C angulo recto oppoſitum, per æqualia, in puncto F. A quo ad media puncta duorum A B & A C, duco F D & F E: quarum quum F D ſecet duo latera A B & B C æqualiter: ipſa erit tertio A C æquidiſtans: vt demonſtratum eſt ad trigeſimamnonam Primi: Eadémque ratione



ctione erit F E æquidiſtans A B. Et quia totus A angulus rectus eſt: erunt & anguli qui ad D & E, recti: per vigeſimamnonam Primi. Ducta itaque F A, erunt duo latera A D & D F, Trianguli A D F, æqualia duobus B D & D F, Trianguli B D F. Ob id, quum vterque angulus qui ad D, ſit rectus: erit, per quartam Primi, F A æqualis F B, quapropter & ipſi F C. Tribus igitur F A, F B, & F C æqualibus, erit F Centrum Circuli: Quod fuit conſtitutum.

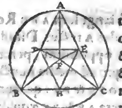
Sed & id conſtabat ex primo capite trigeſimæ Tertij, vt nos illic probauimus.

Sed ſit Triangulum Amblygonium, cujus angulus A obtuſus.

Diuido latus B C bipartitò in puncto H. A quo ad media puncta D & E, duco lineas H D & H E. Et erit H D æquidiſtans A C: & H E æquidiſtans A B, vt paulò antè oſtendimus: Quapropter vterque angulorum B D H & C E H, æqualis angulo A: ob idq; obtuſus. Deductis itaque perpendicularibus à punctis D & E, vtráque ipſarum ſecabit latus B C: & protractæ concurrent, vt ad punctum F, intellecta linea D E, per quintam Petitionem. Iam à puncto concurſus F, duco lineas F A, F B & F C: quæ per quartam Primi, erunt æquales: ſi comparauerimus duo latera A D & D F, Trianguli A D F, duobus B D & D F, Trianguli B D F: deinde duo A E & E F, Trianguli A E F, duobus C E & E F, Trianguli C E F. Quare F Centrum Circuli, vt priùs.



Sit jam A B C Oxygonium. Ac diuiſis tribus lateribus, vt in ſuperioribus, per æqualia in punctis D E H: connecto D E, D H, & E H. Eritq;, vt priùs, D H æquidiſtans A C: & E H, æquidiſtans A B: ob idq;, per vigeſimamnonam Primi, vterque angulorum B D H & C E H, æqualis angulo A: ſicq; acutus.



Ductis igitur perpendicularibus, D F quidem ad A B, & E F ad A C, quæ concurrent intra Triangulum A B C ad punctum F: connect

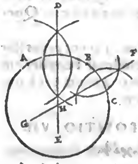
connectantur F A, F B, & F C. Quæ, per quartam Primi bis ſumptam, vt in ſuperioribus, erunt æquales. Quare F, vt priùs, erit Centrum Circuli: Quod erat faciendum.

Modi igitur omnes in primum recidunt: nempè vt diuiſis duobus lateribus Trianguli biſariam, ducantur à duobus punctis diuiſionum perpendiculares: & in concurſu ambarum ſtatuatur Centrum Circuli.

HINC manifeſtum eſt, Triangulum, cujuſmodicumque ſit, id priuilegij habere, quòd ipſi Circulo inſcribi & circumſcribi poſſit. In Circulis autem inſcribendis, diuiduntur anguli: circunſcribendis, latera.

Ex eadem hac depromptum eſt compendium illud artificibus vſitatum,

Per tria data puncta in directam lineam minimè conſtituta, Circulum ducere.



Vt, ſi ſint tria puncta A, B, & C: hæc intelliguntur eſſe connexa per lineas rectas in Triangulum: diuiditurq; biſariam ſpatium inter A & B: itidem ſpatium inter B & C: & educuntur à punctis diuiſionum, duæ perpendiculares: quales hoc loco ſunt D E & F G: ſecantes ſe in H Centro. Quod ſit Circuli officio: ſicut antè demonſtrauimus, ad vigeſimamquartam Tertij.

Conſectarium.

Si fuerit Triangulum Orthogonium, cadit Centrum Circuli in medium latus recto angulo oppoſitum: ſi Amblygonium, extra Triangulum: ſi Oxygonium, intra. Si verò Centrum in medium latus ceciderit, Orthogonium eſt Triangulum: ſi extrinſecus, Amblygonium: ſi introrſum, Oxygonium.

Quod manifeſtum eſt, ex iis, quæ jam demonſtrata ſunt.

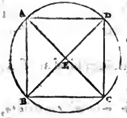
PROBLEMA 6, PROPOSITIO VI.

Εἰς τὸ δοθέντα κύκλον, τετράγωνον ἐγγράψαι.

In dato Circulo Quadratum deſcribere.

Sit datus Circulus A B C D, cujus Centrum E. Volo in ipſo Circulo Quadratum inſcribere.

Duco duas Diametros ſe ad angulos rectos ſecantes in E Centro: quarum extrema connecto quatuor lineis A B, B C, C D, & D A. Dico A B C D eſſe Quadratum.



Erunt enim, per quartam Primi, quatuor latera æqualia: quum ſint baſes quatuor laterum æqualium, quæ à Centro ad Peripheriam exeunt, æqualesq; angulos qui ad E, continent. Et vnuſquiſque quatuor angulorum A, B, C, D rectus, per primam partem trigeſimæ Tertij: quum ſint in Semicirculo. Quadratum igitur eſt A B C D: Quod erat faciendum.

Qvi à Centro originem Quadrati ducunt, duas lineas ad angulos rectos ſe ſcindentes, hinc inde ad Peripheriam continuam, & quatuor baſes connectunt. Ac tum per ſemirectos ratiocinantur. Quod in idem recidit.

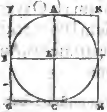
PROBLEMA 7. PROPOSITIO VII.

Περὶ τὸ δοθέντα κύκλον, τετράγωνον περιγράψαι.

Circa datum Circulum, Quadratum deſcribere.

Sit datus Circulus A B C D, cujus Centrum E. Circa hunc volo Quadratum deſcribere.

Duco duas Diametros A C & B D, ſe ſcindentes in Centro E ad angulos rectos. Tum per quatuor ipſarum extrema A, B, C, D, duco quatuor perpendiculares F G, G H, H K, & K F, ſibi inter ſe occurrentes ad quatuor puncta F, G, H, K. Eruntq;, per vigeſimam-octauam Primi, F G & H K inter ſe, & ipſi A C æquidiſtantes: quum in ipſas cadat B D vtrimque ad angulos rectos. Itidem F K & G H, inter ſe & ipſi B D æquidiſtantes: Quapropter,



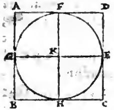
propter, ex trigeſimaquarta ejuſdem bis ſumpta, erunt quatuor anguli F, G, H, K recti, quia rectis oppoſiti. Quumq; duæ F G & H K ſint Diametro A C æquales per eandem: quia Quadrilatera F C & A H, ſunt æquidiſtantium laterum: ſimiliter & duæ F K & G H, Diametro B D æquales: erunt omnes inter ſe æquales, propter æqualitatem Diametrorum. Quare F G H K Quadratum, Circulo circumſcriptum: Quod erat faciendum.

PROBLEMA 8, PROPOSITIO VIII.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον, κύκλον ἐγγράψαι.

In dato Quadrato, Circulum deſcribere.

Sit datum Quadratum A B C D, intra quod deſcribendus ſit Circulus.



Diuido quatuor ipſius latera æqualiter in punctis E, F, G, H: ducta G E parallelo & æquali ipſis A D & B C: itemq; F H parallelo & æquali ipſis A B & C D: quæ ſecet G E in puncto K: Quod dico eſſe Centrum Circuli.

Sunt enim quatuor dimidia K E, K F, K G, & K H, per trigeſimamquartam Primi, æqualia quatuor dimidiis lateribus ipſius Quadrati: ob id, & inter ſe æqualia. Quare, per nonam Tertij, K eſt Centrum Circuli inſcribendi: Quod erat conſtitutum.

PROBLEMA 9. PROPOSITIO IX.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον, κύκλον περιγράψαι.

Circa datum Quadratum, Circulum deſcribere.



Sit datum Quadratum A B C D, circa quod deſcribendus ſit Circulus.

Duco duas Diametros A C & B D, ſecantes ſe in puncto E: idq; æqualiter, per ſextam Primi: quia bini quique anguli qui ad A, B, C, D, ſunt ſemirecti, per quintam & trigeſimamſecundam ejuſdem. Quare

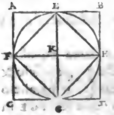
E eſt

E eſt Centrum Circuli circumſcribendi. Quod erat faciendum.

S v b has Quadrati & Circuli mutuas inſcriptiones viſum eſt adſcribere peruulgatum hoc Theorema.

Quadratum Circulo circumſcriptum, duplum eſt Quadrati eidem Circulo inſcripti.

Sit Quadratum A B C D circumſcriptum Circulo E F G H, cujus Centrum K: ſintq; puncta contactuum, E, F, G, H. Et ductis duabus Diametris E G & F H, inſcribatur ipſi Circulo, per ſextam hujus, Quadratum E F G H. Dico A B C D Quadratum, eſſe duplum ipſius E F G H Quadrati.



Nam quum latus A B majoris Quadrati, ſit, per vigeſimamquartam Primi, æquale F H Diametro Quadrati minoris: Quadratum autem ipſius F H duplum ſit Quadrati cujus eſt Diameter, ſcilicet Quadrati E F G H, per Quadrageſimamſeptimam Primi: erit & Quadratum ipſius A B, quod eſt A B C D, duplum Quadrati E F G H: Quod erat oſtendendum.

P o s s e t aliis expoſitionibus demonſtrari, vt ex æqualitate Triangulorum & Quadratorum: Sed nos hac vna contenti fuimus facili & compendioſa oſtenſione. Hoc autem Theorema ab Euclide non fuit appoſitum, fortaſsè quòd ſola Problemata in hoc Quarto libro tractaret: fortaſſe etiam quòd de aliarum Figurarum proportione tradendum fuiſſet: quamuis tamen hanc ordinis rationẽ non ſeruet. Paucas enim Figuras Circulo inſcribere docet, cæteras prætermittit: infinitatẽ quidem deuitans, ſed & difficultate deterritus. Id ipſum verò, vt cujus conſideratio eſſet vſitata, hîc apponere non dubitauimus.

PROBLEMA 10. PROPOSITIO X.

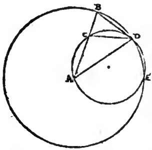
Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν, διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

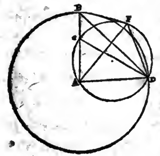
Iſoſceles Triangulum conſtituere, habens vtrumque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum

ang

anguli qui ad verticem.

Sumatur, ad arbitrium, linea A B: quæ ſic diuidatur in punćto C vt docet vndecima Secundi: ſcilicet vt quod fit ex A B in B C, ſit æquale Quadrato A C. Tum poſito Centro in A, deſcribatur interuallo A B, Circulus B D E B: In quo, per primam hujus, accommodetur linea B D æqualis A C: Et connećtantur D A & D C. Dico vtrumque angulorum A B D & A D B, Trianguli A B D, eſſe duplum anguli A. Ac primùm ſatis conſtat Triangulum eſſe Iſoſceles: quum duo A B & A D latera ſint ex Centro: ac proptereà duos angulos A B D & A D B eſſe æquales, per quintam Primi. Iam circa Triangulum A C D deſcribo Circulum D C A D, per quintam hujus. Et quia B D eſt æqualis A C: erit quod fit ex A B in B C, æquale Quadrato B D: ac proptereà B D tangit Circulũ, per vltimam Tertij. Et angulus C D B, per trigeſimamprimam ejuſdem, æqualis eſt angulo alterno C A D. Poſito itaq; cõmuni angulo C D A, erit totus B D A angulus, æqualis duobus C A D & C D A. At angulus B C D, per trigeſimamſecũdam Primi, æqualis eſt iiſdem C A D & C D A, duobus interioribus oppoſitis. Erit igitur B C D toti B D A æqualis: ob id, & ipſi A B D. Quare, per ſextam Primi, linea C D æqualis lineæ B D: ob id, & lineæ C A. Angulus igitur C D A, per quintam Primi, æqualis eſt angulo C A D: ob idq;, angulo C D B. Duplus itaque eſt angulus B D A, anguli B A D: Quare & angulus A B D duplus ejuſdem: Quod erat faciendum.



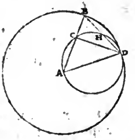


APPENDIX Campani. Forſan contendet aliquis Circulum A C D ſecare Circulum B D E in punćto aliquo Arcus B D, ſimulq; ſecare lineam B D: quo fiet vt B D linea non ſit Circulo A C D applicata: vt in Demonſtratione aſtruitur, ſed ipſum ſecans.

Secent igitur inter ſe, ſi fieri poſſit, ducaturq; à punćto B, linea B F tangens Circulum A C D: & conne-

ctantur F A & F D. Eritq́; per trigeſimamquintam Tertij, quod fit ex A B in B C, æquale Quadrato B F: ob idq́; B F æqualis B D: Vnde, per quintam Primi, angulus B F D æqualis angulo B D F. Et quia, per trigeſimamprimam Tertij, angulus B F A, eſt æqualis angulo A D F alterno: erit angulus B D F major angulo A D F, pars toto.

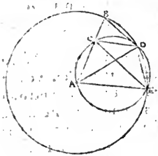
Refellit & idem aliter. Nam ſi fortè dicatur Circulus A C D ſecare lineam B D, neque tamen ſecare Arcum B D majoris Circuli: Secet ipſam, ſi poſſit, in puncto H. Eritq́; quod fit ex



A B in B C, æquale ei quod fit ex D B in B H, per trigeſimamquintam Tertij: quum vtraque B A & B D ab eodem puncto B, cadat ad ſectionem Circuli. Et quia quod fit ex A B in B C, æquale eſt Quadrato B D: erit quod fit ex D B in B H, æquale eidem Quadrato D B: repugnante ſecunda Propoſitione Secundi.

Sed hæc fruſtrà in dubitationem adducuntur à Campano. Linea enim B D non tantùm aſtruitur in Demonſtratione tangere Circulum A C D, ſed etiam probatur.

A T notabilius eſt quod ipſe ſubijcit, Duos Circulos A C D & B D E ſe mutuò ſecare: & Circulum A C D abſcindere à Circulo B D E, Arcum æqualem Arcui B D: Circulum verò B D E, abſcindere à Circulo A C D Arcum æqualem Arcui D C.



Prior pars conſtat ex eo, quòd ſi minor non ſecet majorem, ſed tangat ipſum in puncto D: erit, per vndecimam Tertij, Centrum vtriuſque in linea vna, ſcilicet in A D: propterea quòd in ipſa eſt Centrum majoris, & in eadem punctum contactus. Erit igitur angulus A C D, per trigeſimam Tertij, rectus: &, per decimamtertiam Primi, angulus D C B rectus: ſicq́; A B D rectus, vtpote huic æqualis: Quod, per trigeſimamſecundam Primi, fieri non poteſt.

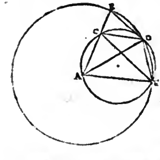
Secabunt igitur inter ſe, vt in punctis D & E. Dico jam Arcum

cum E D majoris, eſſe æqualem Arcui D B: & Arcum E D minoris, æqualem Arcui D C.

Connecto E A, E C, & E D. Eruntq;, per vigeſimamſextam Tertij, quatuor anguli D E C, C E A, E A C, & A D C, æquales: quum ſint Arcus C A & C D æquales per vigeſimamſeptimam ejuſdem. Totus itaque angulus A E D duplus eſt anguli B A D: ob idq;, æqualis vtrique angulorum A B D & A D B. Et quia angulus A E D æqualis eſt angulo A D B, per quintam Primi, quoniam A D & A E ſunt à Centro: erunt duo anguli E & D, Trianguli A E D, æquales duobus angulis D & B, Trianguli A D B: ob id, per trigeſimamſecundam Primi, reliquus angulus A vnius, æqualis reliquo angulo A alterius. Quare, per vigeſimamſecundam Tertij, Arcus E D majoris, æqualis Arcui D B: Et, per eandem, Arcus E D minoris, æqualis Arcui D C: Quod erat probandum.

SVPER hæc obſeruandum, In omni Triangulo, quale hoc loco eſt A B D, angulum verticis, vt hîc angulum A, eſſe vnam tertiam cum vna quinta vnius tertiæ recti: hoc eſt, duas quintas vnius recti: ac breuiter, vnam quintam duorum rectorum. Vtrumque verò angulorum qui ad baſin, eſſe duas quintas duorum rectorum, ſeu quatuor quintas vnius recti. Quod clarum eſt, diuiſis duobus angulis rectis in partes quintas. Tum enim in Triangulo, angulus verticis erit vnius quintæ: & vteruis duorum qui ad baſin, duarum quintarum. Hæc autem diuiſio lineæ A B, qualis eſt in puncto C, dicetur ab Euclide, in trigeſima Sexti, proportio ſecundùm mediam & extremam rationem: vtpotè quum A C ſit medium proportionale inter B C. & B A. In qua quidem, numerus Quinarius præcipuam habet vim. Nam in omni quantitate, quæ ſic diuiditur, Quadratum totius jungitur cum Quadrato dimidiæ: Quod aggregatum perpetuò eſt quintuplum Quadrati ipſius dimidiæ. Id verò ex ea quam propoſuimus ſpecie in vndecima Secundi, repetemus. Sint 8 diuidenda ſicut proponitur. Duco 8 in ſe, fiunt 64: Duco etiam ejus dimidium nempè 4. quanta eſt illic linea D E aut E B, in ſe: fiunt 16. Hæc juncta, ſcilicet 64 & 16, faciunt 80, quintuplum 16. Itaque ad hujuſmodi Triangulum inueſtigandum, opus fuit tali diuiſione lineæ: cui præeſt Quinarius numerus. Hoc igitur Problema ad Pentagonum Circulo

inſcribendum ſpectat: vt in ſequenti Propoſitione docetur.



ATQVE animaduertendum, lineam A C, eſſe latus Pentagoni æquilateri, Circulo A C D inſcribendi. Quod ſic demonſtratur:

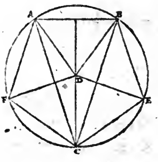
Ex poſteriori conſtructione conſtitit, tres Arcus A C, C D, & D E minoris Circuli, eſſe æquales. Quumq; ex eadem conſtiterit duas lineas A D & A E eſſe æquales: erit & Arcus A E æqualis Arcui A D per vigeſimamſeptimam Tertij: quapropter eorum dimidia æqualia. Si igitur A E diuidatur æqualiter, erit tota Peripheria A C D E A diuiſa in quinque Arcus æquales. Quorum quum ſubtenſæ ſint æquales per vigeſimamoctauam ejuſdem: erit vnaquæque illarum latus Pentagoni: Quod erat demonſtrandum. Et erit idem A C, latus Decagoni, Circulo B D E inſcribendi: quod ad ſequentes Demonſtrationes pertinet. In ſumma, hæc omnia ex Proportionibus dependent. Et, vt noſtrum de hac tota re judicium ingenuè explicemus, huic tractationi Proportiones erant præmittendæ.

Nos huic loco hoc ſubnectemus Problema:

Super data recta linea Pentagonum æquilaterum & æquiangulum conſtituere.

Sit ſuper data linea A B conſtituendum Pentagonum æquilaterum & æquiangulum.

Super ipſa A B conſtituo per vigeſimamtertiam & trigeſimamſecundam Primi, Triangulum Iſoſceles A B C, quale proponit hæc decima: vt ſcilicet ſuper baſi A B, duo anguli C A B & C B A, ſint æquales duobus modò conſtructis: nempè vterque duæ quintæ duorum rectorum, & angulus verticis C vna quinta eorundem. Diuido poſtmodùm angulum C æqualiter, ductâ lineâ C D: Ac ſuper puncto A conſti-



tuo

tuo angulum C A D, æqualem angulo A C D: ductâ lineâ A D, quæ concurrat cum C D ad punctum D: idq́; intra Triangulum A B C: nam C D protracta cadet in baſin A B, & A D in latus B C. Tum connecto D B.

Et quia in Triangulo A C D, duo anguli A & C ſunt æquales: erunt, per ſextam Primi, duo A D & C D latera æqualia. Rurſus, quia duo latera C B & C D, Trianguli C B D, ſunt æqualia duobus C A & C D, Trianguli A C D, & angulus C hujus, æqualis angulo C illius: erit, per quartam Primi, baſis D B baſi D A, ſicq́; lineæ D C, æqualis. Erit igitur, per nonam Tertij, D Centrum Circuli. Et ducatur Circulus A B E C F. Iamq́; angulus A D B duplus eſt anguli A C D, per decimamnonam Tertij: Ipſe igitur A D B angulus facit duas quintas duorum rectorum: hoc eſt, vnam quintam quatuor rectorum. Quum itaque ſpatium circa D Centrum, ſit æquale quatuor rectis angulis: omninò diuidetur ſpatium ipſum in quinque angulos, ęquales ipſi A D B, népè in quinque quintas: ductis lineis D E & D F, quæ cum D A, D B, & D C æqualitatem quinariam diſtinguant. Connexisq́; A F, F C, C E, & E B, erit Rectilineum A B E C F, Pentagonum æquilaterum, per legem Centri & Peripheriæ, adhibitâ quartâ Propoſitione Primi: Et æquiangulum, per quartam & quintam ejuſdem: quum quinque anguli A, B, E, C, F, diuidantur in decem æqualia: Quod erat faciendum.

Hoc Problema Bouillus ideò difficile putauit, quòd ab Euclide eſſet prætermiſſum. Sed & cæteras Figuras, quarum poſteriùs inſcriptio demonſtranda eſt, ſuper data linea facilè conſtruet, qui hanc noſtram perſpexerit Demonſtrationem.

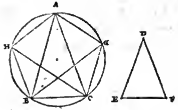
PROBLEMA II. PROPOSITIO XI.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε, καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

In dato Circulo Pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit datus Circulus A B C, cui inſcribendum ſit Pentagonum æquilaterum & æquiangulum.

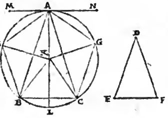
Conſtruatur Triangulum Iſoſceles D E F, quale præſcripſit antecedens Propoſitio: Et in dato Circulo inſcribatur Trian-



gulum A B C, ipſi D E F æquiangulum, per ſecundam hujus: vt ſcilicet vterque angulorum B & C duplus ſit ad angulum verticis A. Horum vtrumque diuido æqualiter, ductis lineis B G & C H hinc atque hinc ad Peripheriam.

Eritq; totus Circulus in quinque Arcus diuiſus, in punctis A, H, B, C, G: eosq; æquales, per vigeſimamquintam Tertij, propter æqualitatem quinque angulorum qui in ipſos cadunt: quorum quatuor ad baſin Trianguli A B C: quintus verò ad verticem A. Connexis itaque A H, H B: A G. & G C: erit Pentagonum A H B C G Circulo inſcriptum, æquilaterum, per vigeſimamoctauam Tertij, propter æqualitatem Arcuum quos quinque latera ſubtendunt: Et æquiangulum, per vigeſimamſextam ejuſdem: propterea quòd quinque Arcus A B, H C, B C, C A. & G H, in quos anguli ipſius Pentagoni cadunt, ſunt æquales: quum ipſorum dimidia ſint æqualia. Sicq; conſtat Propoſitio.

ALITER. Conſtructo Triangulo D E F in ſpeciem antecedentis Propoſitionis, ſit Centrum K ipſius Circuli propoſiti A B C: & ſuper Centro conſtituatur angulus B K C, æqualis alterutri angulorum E aut F, Trianguli D E F: connectaturq; B C. Dico B C eſſe latus Pentagoni.



Diuido angulum K æqualiter, ductâ Diametro A K L. Tum connecto B A & C A. Et conſtat, ex decimanona Tertij, angulum K eſſe duplum totius anguli A. Igitur totus A angulus æqualis eſt angulo D, cujus duplus eſt ipſe K. Et quia Trianguli A B K, duo anguli A & B ſunt æquales, per quintam Primi, ſunt enim K A & K B à Centro: erit, per trigeſimamſecundam ejuſdem, angulus B K L duplus ad vtrumlibet angulorum K A B & K B A, exterior interiori: Atq; eadem ratione angulus C K L duplus ad vtrumlibet duorum K A C & K C A. Itaque, quum ambo qui ad K anguli ſint æquales, erunt duo anguli A & B, Trianguli A B K, duobus A & C, Trianguli A C K, mutuò æquales: ob idq;, per vigeſimamſextam

ſextam Primi, duæ baſes A B & A C æquales. Triangulum igitur A B C Iſoſceles. Quumq; angulus totus A, æqualis ſit angulo D: erunt duo reliqui anguli A B C & A C B, per trigeſimamſecundam Primi, duobus reliquis E & F æquales. Quare Triangulum A B C, Triangulo D E F æquiangulum. Ac jam procedet Demonſtratio, vt modò inſtitura fuit: intellectis ſcilicet B G & C H lineis.

Hanc Demonſtrationem adſcripſimus, vt oſtenderemus, inſcribendarum in Circulis Figurarum rationem à Centro & Diametro pendêre. Vt etiam intelligeremus, duos angulos qui ad K, Trianguli B C K, ſuper Centro incumbentes, eſſe cognitos. Quod in Heptagono Bouillus non putat. Sed vtinam tam facilis eſſet Heptagoni inuentio, quàm ipſi ſunt noti.

Atque hoc loco jucundum eſt intueri Triangulorum varietates. Vterque enim angulorum qui ad A, efficit quintam vnius recti: vnde emergit latus Decagoni eidem Circulo inſcribendi: vt conſtat intellectis lineis B L & L C. Arcus enim B C diuiditur in duo æqualia in puncto L, per vigeſimamquintam Tertij.

Ex Trianguli itaque æquilateri inſcriptione, notum fit Hexagonum: ſicq; ſemper ex ſimplici numero laterum, cognoſcitur duplum: vt ex Quadrato Octogonum: ex Octogono Sedecangulum. ac ſic continenter in cæteris. Immò etiam ex hac noſtra Demonſtratione ſtatim innoteſcit Pentagoni circumſcriptio: vt in ſequenti apparebit.

ALITER rurſus poterimus variare Pentagoni inſcriptionē. Sit Circulus, quem modò exhibuimus, A B C: maneatq; Triangulum ipſum D E F. Duco ad Circulum, lineam M A N tangentem ipſum, per decimamſextam Tertij: Et ad punctum A, conſtituo angulum M A B æqualem alteri angulorum E aut F (quem ſatis conſtat eſſe minorem recto): ductâ lineâ A B, quæ ſecet Peripheriam in puncto B. Rurſus ad idem punctum A, conſtituo angulum N A C æqualem ipſi M A B: ductâ lineâ A C, quæ ſecet Peripheriam in C. Et connecto B C. Dico B C eſſe latus Pentagoni. Quod patet diuiſo Arcu A B per æqualia in puncto H, ductiſq; A H & B H: itemq; diuiſo Arcu A C per æqualia in G, ductiſq; A G & C G. Sumpto enim Quadrangulo A B C G, conſtat, ex trigeſimaprima Tertij, angulum A B C æqualem eſſe angulo

gulo N A C alterno : ob id, & angulo E. Similiter ſumpto Quadrangulo A C B H, erit angulus A C B æqualis angulo M A B alterno : ob id, & angulo F. Quare, per trigeſimamſecundam Primi, erit, vt priùs, Triangulum A B C ipſi D E F Triangulo æquiangulum : & procedet Demonſtratio vt in ſuperioribus.

SED & conſtituto ad Peripheriam angulo B, triplo anguli D, ductis lineis A H & B H, erit vtraque ipſarum A H & B H latus Pentagoni : ſicut intelligent ij qui ex comparatione angulorum ratiocinari volent. Nam in priori ſpecie, duo anguli B & C Pentagoni, ad Peripheriam, in tres angulos æquales diuiduntur : quorum ſinguli ſunt æquales angulo D. Hujuſmodi autem Demonſtrationes articulatim non exponimus, quò breuitati conſulamus : ac ſatis nobis eſt, ſi eas vtcumque informatas ex aliarum argumento, ſtudioſis examinandas relinquamus. In hac enim Figurarum inſcriptione tam latè patet ſpeculandi campus, vt ſingula aſſequi meditando nemo vnquàm poſſit. Quanquam nos initio cum Campano rem non admodùm vtilem eſſe putabamus. Quum verò attentiùs exploraremus quò ſpectaret hæc tam ordinata tamq; artificioſa conſtitutio : ſanè comperimus non fruſtrà creditum eſſe, Figuras quantò propiùs ad Circuli compoſitionem accedunt, tantò perfectiores eſſe. Res igitur hæc tanta eſt, quanta fortaſsè in toto opere Geometrico nulla : ſicut nos aliquãdo oſtendemus propriâ commentatione, ſi noſtris inuentis quæ in Geometria quotidie molimur, ſummus ille Geometer annuerit. Ex hac enim materia, nouum velut opificium & hactenus non excogitatum exurgit.

PROBLEMA 12, PROPOSITIO XII.

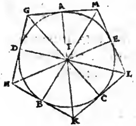
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Circa datum Circulum, Pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit Circulus A B C, cujus Centrum F, cui circumſcribendum ſit Pentagonum æquilaterum & æquiangulum.

Diuido Peripheriam totam in quinque æqualia, per anteceden

cedentem, in punctis A, D, B, C, E. Et à Centro F educo quinque lineas, FA, FD, FB, FC & FE: ad quas hinc inde duco quinque perpendiculares: Quæ concurrent in punctis G, H, K, L, M, tangentq; Circulum, per Conſectarium decimæquintæ Tertij. Tum ad puncta concurſus ipſarum, duco à Centro lineas FG, FH, FK, FL, FM. Et quia GA & GD ab vno puncto cadunt in Circulum: ipſæ erunt æquales, per ea quæ demonſtrauimus ad trigeſimamquintam Tertij. Atque eadem ratione erit HD ipſi HB æqualis: & KB ipſi KC: ſicq; ordinatim. Et quoniam quinque Arcus AD, DB, BC, CE & EA ſunt æquales: erunt, per vigeſimamſextam Tertij, quinque anguli qui ad Centrum, AFD, DFB, BFC, CFE, & EFA, æquales.

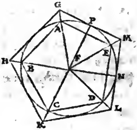


Et quia duo latera AG & FA, Trianguli FGA, ſunt æqualia duobus DG & FD, Trianguli FGD, & latus GF commune: erunt, per octauam Primi, duo ipſorum anguli qui ad F, inter ſe: duoq; anguli qui ad G, inter ſe quoque æquales. Similiter erunt duo anguli qui ad F, Triangulorum DFH & HFB, inter ſe: duoq; qui ad H, inter ſe æquales. Sicq; trium reliquorum Triangulorum BFC, CFE, & EFA, ſinguli diuidentur per æqualia, lineis FK, FL, & FM: eruntq; decem anguli qui ad Centrum, æquales. Quoniam igitur duo anguli A & F, Trianguli GAF, ſunt æquales duobus angulis A & F, Trianguli MAF, latusq; AF commune: erit, per vigeſimamſextam Primi, angulus G vnius, æqualis angulo M alterius: latusq; GA, æquale lateri AM. Eadem ratione erit angulus G, Trianguli GFD, æqualis angulo H, Trianguli DFH: latusq; GD æquale lateri DH. Quum itaque GA ſit dimidium GM, & GD dimidium GH: ſintq; GA & GD æqualia: erunt, per animi Notionem, GM & GH eorum dupla, æqualia.

Similiter probabimus GM, ML, LK, & KH eſſe æqualia. Quare Pentagonum GHKLM, æquilaterum. Sed & æquiangulum. Quum enim duo anguli qui ad G, probati ſint æquales: duoq; qui ad M, æquales: & G dimidius, æqualis M dimidio: erit totus G, toti M æqualis. Atque eadem ratione reliqui anguli ipſius Pentagoni probabuntur æquales. Quod erat faciendum.

A ALIT

ALITER ex Parallelis. In Circulo A B C, cujus Centrum F, inſcribo Pentagonum æquilaterum & æquiangulum A B C D E ſicut docet antecedens: per cujus quinque angulos duco à Centro vltra Peripheriam, quinque lineas F G, F H, F K, F L, & F M. Et conſtat quinque angulos qui ad F Centrum, eſſe æquales: quum latera quinque intrinſecùs Triangulorum ſint æqualia, & baſes æquales. Conſtat etiam quinque angulos Pentagoni, qui ad Peripheriam, eſſe diuiſos in decem angulos æquales, per quartam Primi. Duco itaque inter duas lineas F G & F H, lineam G H, parallelum lateri A B, & tangentem Circulum A B C, per ea quæ docuimus ad decimamſextam Tertij: atque huic ſimiles duco H K, K L, & L M, ſingulis lateribus B C, C D, & D E parallelos.



Et quoniam F G cadit in duas parallelos A B & G H, erunt duo anguli F G H & F H G, duobus F A B & F B A mutuò æquales, per ſecundam partem vigeſimænonæ Primi: ob idq;, inter ſe æquales. Et per ſextam igitur Primi, duæ lineæ F G & F H æquales. Eadem ratione erunt duo anguli F H K & F K H, duobus F G H & F H G mutuò æquales: & F K æqualis F H: quapropter & ipſi F G. Quum itaq; anguli qui ad F, ſint æquales: erit, per quartam Primi, baſis H K baſi G H æqualis. Similiter probabuntur tres lineæ F K, F L, & F M, æquales duabus F G & F H: Duæ item baſes K L & L M, æquales duabus G H & H K: Et anguli, quos cum ipſis F K, F L, & F M faciunt, æquales inter ſe. Iam connecto quintam lineam M G: quæ erit æqualis quatuor prioribus, per ipſam quartam Primi: quum duæ lineæ F G & F M probentur æquales: ſitq; angulus G F M æqualis vnicuique angulorum qui ad F. Hæc etiam tangit Circulum. Ad punctum enim contactus ipſius L M cum Circulo, quod ſit N, duco F N. Et conſtat, ex decimaſeptima Tertij, vtrumque angulum qui ad N, eſſe rectum. Quapropter quum angulus L, Trianguli F L N, ſit æqualis angulo M, Trianguli F M N: & angulus N vnius, æqualis angulo N alterius: & F N vtrique communis: erit, per vigeſimamſextam Primi, N L æqualis N M: ſicq; L M diuiſa çqualiter in puncto N. Et quoniam tria latera Trianguli

guli F G P; ſunt æqualia tribus lateribus Trianguli F M P: erit angulus P vnius, æqualis angulo P alterius, per octauam Primi: quapropter vterque rectus; per decimamtertiam ejuſdem. Quum itaque duo anguli F M P & F P M, Trianguli F M P, ſint æquales duobus angulis F M N & F N M, Trianguli F M N: & latus F M vtrique commune: erit F P æqualis F N. Sed F N eſt à Centro ad Peripheriam. Et erit igitur F P à Centro ad Peripheriam. Quumq; M G ſit ad E P perpendicularis: ipſa, per Conſectarium decimæquintæ Tertij, contingit Circulum. Quare G H K L M Pentagonum circumſcriptum Circulo æquilaterum: Quod & æquiangulum probatum eſt, ex æqualitate dimidiorum: ſicut facere oportuit.

Atque hæc Demonſtratio quamuis amplior videatur, tamen ipſo intuitu ſeſe explicat.

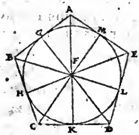
PROBLEMA 13, PROPOSITIO XIII.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

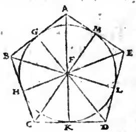
In dato Pentagono æquilatero & æquiangulo Circulum inſcribere.

Sit datum Pentagonum A B C D E æquilaterum & æquiangulum, in quo deſcribendus ſit Circulus.

Duos angulos ad vnum quempiam laterum ipſius Pentagoni adjacentes, vt A & E, diuido æqualiter, ductis lineis A F & E F: Quæ concurrent intra Pentagonum ad punctum F. A quo ad vnumquodque laterum Pentagoni, duco quinque perpendiculares F G, F H, F K, F L, & F M. Tum ad duos angulos hinc inde proximos B & D, duco F B & F D. Et quia duo anguli A & M, Trianguli A F M, ſunt æquales duobus angulis A & G, Trianguli A F G: & latus A F commune: erit, per vigeſimamſextam Primi, F M æqualis F G. Ac ſimiliter, per eandem, erit F L æqualis F M, ſumptis duobus Triangulis E F L & E F M. Rurſus, quum duo latera A B & A F, Trianguli A B F, ſint æqualia duobus A E & A F, Trianguli A F E: & angulus A vnius, æqualis



qualis angulo A alterius erit, per quartam Primi; angulus A B F æqualis angulo A E F. Et quia totus B toti E eſt æqualis, & E diuiſus æqualiter: erit & B diuiſus æqualiter. Eadem ratione probabitur totus B æqualiter diuiſus: ſumptis Triangulis E A F & E D F. Quia ergo duo anguli G & B, Trianguli G F B, ſunt æquales duobus angulis H & B, Trianguli H F B, & latus F B commune: erit per vigeſimamſextam Primi, F H æqualis F G. Eadem ratione probabitur F K æqualis F L, ſumptis Triangulis L F D & K F D. Quum igitur quinque lineæ F G, F H, F K, F L, & F M ſint æquales: erit F Centrum Circuli, per nonam Tertij. Qui ſecundùm ipſarum quantitatem deſcriptus, tanget latera Pentagoni, per primam partem decimæquintæ Tertij: Quod erat faciendum.



INITIO conſtructionis præmonſtrat Campanus, lineas A F & E F, diuidentes duos angulos A & E, concurrere intra Pentagonum. Sed hoc conſtabat ex antecedentis compoſitione: in qua F G & F H, ad Centrum F terminatæ probabantur æquales. Nam ex hujuſmodi conſtructionibus, Conſectaria colligi ſolent. Quod ex prima Tertij, & decimaquinta ejuſdem, moxq; ex decimaquinta hujus, aliisq; Propoſitionibus ſatis multis videre eſt. Sicut etiam ex hac ſequitur, immò ex antecedente: Lineas perpendiculares à punctis mediis laterum Pentagoni eductas, per Centrum Circuli tranſire, anguloſq; oppoſitos æqualiter diuidere. Vt hoc loco, A K eſt linea vna, diuidens angulum A, latuſq; C D æqualiter: ac reliquæ in eundem modum. Quod ſic oſtenditur.

Spatium illud circa Centrum F, æquale eſt quatuor rectis: qui in decem æquales diuiduntur, decem lineis in F conuenientibus. Quinque igitur anguli A F M, M F L, E F L, L F D, & D F K ſunt duobus rectis æquales. Quapropter A F & F K, per decimamquartam Primi, vnam lineam efficiunt. Eadem & de cæteris lineis erit probatio. Atque hoc in omnibus Figuris æquilateris imparium laterum eſt perpetuum.

PROBLEMA 14. PROPOSITIO XIIII.

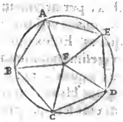
Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

περιγράψαι.

Circa datum Pentagonum æquilaterum & æquiangulum, Circulum deſcribere.

Sit circa datum Pentagonum æquilaterum & æquiangulum A B C D E deſcribendus Circulus.

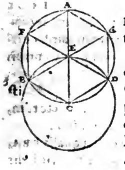
Duos angulos A & E diuido in duo æqualia, ductis lineis A F & E F: quæ concurrent intra Pentagonum ad punctum F, vt anteà probauimus. Tum ab ipſo puncto F, ad reliquos angulos duco lineas F B, F C, & F D. Et quia duo latera A F & A B, Trianguli A B F, ſunt æqualia duobus lateribus A F & A E, Trianguli A E F, & angulus A vnius æqualis angulo A alterius: erit, per quartam Primi, F A æqualis F E: & angulus A B F æqualis angulo A E F. Quumq; totus B, toti E ſit æqualis, erit B diuiſus in duo dimidia. Atque eadem ratione vterque angulorum C & D diuiſus in duo dimidia: ob id, quinque lineæ F A, F B, F C, F D, & F E æquales. Quare, per nonam Tertij, erit F Cētrum Circuli, Pentagono A B C D E circumſcribendi: Quod faciendum fuit.



PROBLEMA 15. PROPOSITIO XV.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

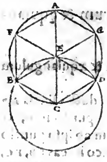
In dato Circulo, Hexagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.



Sit datus Circulus A B C D, cujus Centrum E, cui inſcribendum ſit Hexagonum æquilaterum & æquiangulum.

Duco Diametrum A E C: & ſecundùm quantitatem Semidiametri E C, deſcribo Circulum E B D, qui ſecet priorem in duobus punctis B & D. A quibus, per Centrum E, duco duas B E G & D E F Diametros. Trium verò Diametrorum terminos conjungo ſex lineis A F, F B, B C, C D, D G, & G A. Dico A F B C D G,

eſſe Hexagonum quale proponitur.

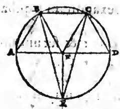


Erit enim ex Themate primæ Propoſitionis Primi, vtrumque Triangulorum B E C & C E D æquilaterum: & per quintam ejuſdem, æquiãgulum. Duo igitur anguli B E C & C E D cum tertio quopiam æquali, efficient, per trigeſimamſecundam ejuſdem, duos rectos: quum vterque ſit tertia pars duorum rectorum. Et quia ijdem B E C & C E D: cum angulo D E G, efficiunt duos rectos, per decimamtertiam ejuſdem: erit D E G æqualis vtrique illorum. Sunt itaque ſex anguli qui ad E, æquales. Et ſex igitur Arcus quos comprehendunt, æquales, per vigeſimamquintam Tertij: Quapropter & ſex illorum ſubtenſæ æquales, per vigeſimamoctauam ejuſdem. Æquilaterum igitur Hexagonum. Sed & æquiangulum, per vigeſimamſextam ejuſdem: propterea quòd Arcus in quos cadunt, æquales ſunt: nempe ſinguli ſexta pars Peripheriæ: Quod fuit conſtitutum.

ALITER. Sit in Circulo A B C D E, cujus Centrum F, deſcribendum Hexagonum æquilaterum & æquiangulum.

A Centro F duco Semidiametrum F A. Tum ex puncto A, per primam hujus, accommodo lineam A B æqualem ipſi Semidiametro: Quam dico eſſe latus Hexagoni æquilateri & æquianguli.

Connecto F B. Et quia A B eſt æqualis F A: eſt & æqualis F B. Triangulum igitur A F B æquilaterum: &, per quintam Primi, æquiangulum. Conſtituo poſtmodùm ſuper F Centro, angulum B F C æqualem angulo A F B, vel angulo F B A, quod perinde eſt, ductâ lineâ F C: & connecto B C. Et



quia A F B eſt tertia pars duorum rectorum, per quintam & trigeſimamſecundam Primi: erit & B F C tertia pars duorum rectorum. Quapropter duo reliqui F B C & F C B, quum ſint æquales, per quintam Primi, erunt duę tertię duorum rectorum, per trigeſimamſecundam ejuſdem.

Vel per quartam Primi, quum angulus B F C ſit æqualis F B A, duoq; latera F B & F C ſint æqualia duobus A B & B F: erit baſis B C æqua

B C æqualis baſi B F: quapropter & ipſi F C. Triangulum igitur F B C æquilaterum & æquiangulum. Demùm conſtituo angulum C F D æqualem vtrique angulorum qui ad F, poſiti ſunt, ductâ lineâ F D:& connecto C D. Eritq; jam expoſita ratione, Triãgulum F C D æquilaterum & æquiangulum. Quumq; tres anguli qui ad F, duobus rectis ſint æquales, eſt enim vnuſquiſque tertia pars duorum rectorum: erit, per decimamquartam Primi, A D linea vna: ob idq;, Diameter Circuli. Alter igitur Semicirculus A F D, in tot partes æquales diuidetur, in quot A B C, totq; æquales ſubtenſas comprehendet. Quare A B eſt latus Hexagoni æquilateri Circulo inſcribendi. Quod & æquiangulum erit: nam dimidium totius B, æquale eſt totius C dimidio: Quod fuit faciendum.

Q V V M igitur duxerimus ab F Centro perpendicularem F E, & connexuerimus B E & C E: effecerimus Triangulum B E C: cujus angulus E, qui ad verticem, erit ſexta pars duorum rectorum, per decimamnonam Tertij. Nam B F C angulus, ad ipſum duplus. Vterque verò duorum E B C & E C B angulorum ad baſin, erit duplus ſeſquiplex, ſeu duplus ſeſquialter, ad ipſum E angulum. Atque hæc erat ars inueniendi lateris Hexagonici. Duæ igitur Demonſtrationes modò inductæ, compendiariæ fuerunt.

Poterat etiam inſcribi Hexagonum ex Trianguli Æquilateri inſcriptione, diuiſo vnoquoque trium Arcuum per æqualia.

S E D jam hoc Figurarum inſcribendarum negotium eluci demus.

Quæcumque imparium ſunt laterum Figuræ, ex Circulo inſcribuntur adminiculo Triangulorum Iſoſcelium, quorum duo anguli qui ad baſin, multiplices ſint ejus anguli qui ad verticem. Triangulum itaque Æquilaterum (quod eſt primum imparium laterum, atque ob id, tot habet Priuilegia) ſeipſum explicat: idq; habet ab Vnitate, per quam deſignatur. Conſtituto enim Triangulo Iſoſceli ad Peripheriam, cujus duo anguli, qui ad baſin, æquales ſint angulo qui ad verticem (Æquale verò ſuiipſius multiplex eſt, vt Vnitas) ipſa baſis erit latus Trianguli Æquilateri Circulò inſcribendi. Ac ſic Æquilaterum, tanquam Iſoſceles conſideratur.

Pentag

Digitized by Google

Pentagonum autem, quod eſt ſecundum imparium, reperitur officio Trianguli Iſoſcelis, cujus vterque angulus qui ad baſin, duplus ſit ejus qui ad verticem: ſicut demonſtratum eſt in vndecima hujus.

Heptagonum verò, per Triangulum cujus vterque angulus, qui ad baſin; triplus ſit ejus qui ad verticem: Ennagonum, quadruplus: Vndecangulum, quintuplus: Tredecangulum, ſextuplus: ac ſic continenter.

PARIVM autem laterum Figuræ æquilateræ Circulo inſcribuntur, officio Triangulorum Iſoſcelium, in quibus anguli qui ad baſin, ſint multiplices ſeſquiplices ejus anguli qui ad verticem.

Vt Quadratum (primum parium laterum, atque eam ob cauſam etiam tot habet priuilegia) inſcribitur Circulo: ex Triangulo Iſoſceli ad peripheriam collocato, cujus vterque angulus qui ad baſin, ſit ſeſquiplex, ſeu ſeſquialter, ejus anguli qui ad verticem. Sed, compendij cauſſa, aliter docuit Euclides in ſexta hujus. Hexagonum, ſecundum parium, officio Iſoſcelis, cujus vterque angulus qui ad baſin, ſit duplus ſeſquiplex ejus qui ad verticem: Octogonum triplus ſeſquiplex: Decagonum, quadruplus ſeſquiplex: ſicq; in continuum, per Figuras parium laterum. Atque ex iis innumerabiles abundant meditationes.

At verò imparium laterum Figuræ, ideò difficiliores cognitu, quòd pleræque ipſarum per numeros Primos repræſententur; Quales ſunt 3, 5, 7, 13, 17, ac ſimiles. Sed de his aliàs vberiùs, vt antè polliciti ſumus. Hæc tamen in Hexagono docere potiùs viſum eſt, quòd ipſum ſit maximè perſpicuum: atque ob eam cauſam quòd per ſenarium numerum ſignificetur, qui primus eſt Perfectorum.

Conſectarium.

Latus Hexagoni Circulo inſcripti, æquale eſt Circuli Semidiametro.

Hoc verò ſatis conſtat ex vtraque Demonſtrationum: maximè ex ſecunda, quæ per Triangula Æquilatera procedit, quorum latera ſunt Semidiametri.

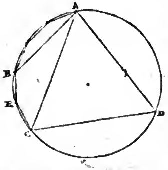
E x Campano. Non propoſuit Euclides, Circa datum Circulum, Hexagonum æquilaterum & æquiangulum vt deſcribatur: neque vt intra aut circa Hexagonum, Circulus: quòd ſatis eſſe putaret de Pentagono propoſuiſſe: ex cujus comparatione, reliquæ ſpecies Æquilateræ Circulis accommodabuntur, atque iiſdem Circuli. Illud inſuper obſeruandum, Omnem Figuram æqualium laterum Circulo inſcriptam aut circumſcriptam, æqualium quoque eſſe angulorum. De inſcripta conſtat ex vigeſimaſeptima & vigeſimaſexta Tertij: ſumptis binis quibuſque Arcubus contiguis, quos duo latera angulum continentia ſubtendunt. De circumſcripta autem, ductis lineis à Centro Circuli ad omnes angulos ipſius Figuræ & ad puncta contactuum: ſicut ex themate decimætertiæ hujus oſtenditur.

Hîc etiam animaduertemus, quod & ſuprà in quadrageſimaſexta Primi monuimus, in Figuris parium laterum, lineas ab angulis per Centrum ad angulos duci: ſed in Figuris imparium laterum, ab angulis per Centrum ad latera.

PROBLEMA 16, PROPOSITIO XVI.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

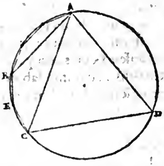
In dato Circulo, Superficiem quindecim laterum æquilateram & æquiangulam inſcribere.



Sit in dato Circulo A B C D inſcribenda Superficies quindecangula æquilatera & æquiangula.

Intra Circulum, per doctrinam ſecundæ hujus, & primæ ejuſdem, applico latus Trianguli Æquilateri, quod ſit A C: &, per vndecimam hujuſce, latus Pentagoni, quod ſit A B, in Arcu A C.

Qualium itaque ſegmentorum æqualium tota A B C D Peripheria eſt quindecim, talium Arcus A B C, tertia pars ipſius, erit quinque: & Arcus A B quinta pars ejuſdem erit trium: ob idq;, reſiduum B C, duorum æqualium.



Secetur, per trigeſimam Tertij, Arcus B C bifariam in E puncto. Et erit vterque Arcuum B E & E C, decimaquinta pars totius Peripheriæ. Si igitur conjunxerimus rectas B E & E C: fient duo latera Quindecanguli æquilateri. Et tales tres admittet Arcus A B, ſicut aſtruximus: fientq; in Arcu A C, quinque decimæquintæ totius Peripheriæ. Qui quum ſit tertia pars ipſius, reliquæ duæ tertiæ C D & D A, in tot tantasq; ſectiones diuidentur: quarum ſubtenſæ, erunt latera Quindecanguli æquilateri: Quod erat faciendum.

SIMILITER autem vt in Pentagono, ſi per quindecim puncta diuiſionum æqualium Circuli, duxerimus lineas tangentes: circa ipſum Circulũ deſcribetur Quindecangulum æquilaterum & æquiangulum: Atque inſuper iiſdem, quibus illic, obſeruationibus, dato Quindecangulo Circulum inſcribemus & circũſcribemus.

Libri quarti Geometricorum Elementorum Finis.

✱

IACOBI PELETARII CENOM. IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA

Demonſtrationum Liber quintus.

DEFINITIONES.

Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

Pars, eſt Magnitudo Magnitudinis minor majoris, quum minor majorem metitur.

In explicandis hujus Quinti Definitionibus, Numeros nobis accommodabimus. Id enim diſciplinæ gratiâ in Principiorum oſtenſione licet: In demonſtrationibus autem Propoſitionum, Geometrica dignitas ſeruanda eſt. Alia quippe ratio & natura Continuorum, atque alia Diſcretorum. In quibuſdam tamen adeò religioſi non erimus: nempe dum Quantitatis vocabulum pro Magnitudine vſurpabimus. Quamuis enim hoc peculiarius, illud generalius ſit: vtrumq; tamen Geometria paruo diſcrimine ſibi vendicat. Partem itaq; hoc loco plerique eſſe putarunt, quæ totum æqualiter diuidit: ſcilicet quæ aliquoties ſumpta, Totum integrè conſtituit. Ac ſic binaria denominatio neque Ternarij, neq; Quinarij, neque vllius imparis integri pars erit: ſed tantùm Quaternarij, Senarij, & parium. Sed, meo judicio, non rectè accipiunt. Neque enim Proportiones aliter quàm generatim conſiderandæ ſunt. Atque vt, in Diſcretis, omnis Numerus eſt pars aut partes majoris: ſic & in Proportionum materia, omnis Magnitudo pars eſt aut partes majoris, quum Proportio rationalis eſt: hoc eſt,

Ratio ſeu Proportio inter eas aduenit Magnitudines, quæ ſunt ejuſdem generis. Vt enim neque Numerum ad Sonum, neque Tempus ad Locum rectè quiſquam comparauerit: ſic neque Lineam ad Superficiem, neque Superficiem ad Solidum. Linearum verò ad Lineas, Superficierum ad Superficies, & Solidorum ad Solida conueniens fiet collatio. Quædam autem dicitur, non certa. Omnis enim Linea ad alteram habet rationem aliquam, non tamen certam. Atque ejuſmodi Quantitates dicuntur irrationales, incommenſurabiles, ſeu incommunicantes: qualis eſt lateris Quadrati ad Diametrum. Certæ verò rationes ſeu nominatæ, ſunt quæ per Numeros indicantur. Quarum denominationes ex Arithmeticis petuntur.

Ἀναλογία δὲ ἐστιν, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης.

4 Proportionalitas, eſt Proportionum ſimilitudo.



Vt ſi dicatur ea eſſe proportio A ad B, quæ eſt C ad D: ejuſmodi ſimilitudo ſeu comparatio, Proportionalitas vocatur. Malè igitur verterunt quidam Proportionem loco Proportionalitatis. Ἀναλογία enim aliâs Proportionem ſignificat Quintiliano: hìc verò Proportionum ſimilitudinem, quam Proportionalitatem diximus, vtcumque vox parum Latina ſit: quales & huc ſatis multæ incidunt.

Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

5 Rationem habere inter ſe Magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ, poſſunt altera alteram excedere.

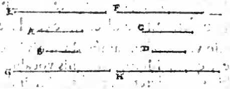
Non poterat alio ingenio vim ſubſtantiamq; Rationis inter Magnitudines exponere, quàm Multiplicationis vocabulo: vt etiam incommenſurabiles includeret. Exceſſus enim, index comparationis Quantitatum Quum ergo latus Quadrati multiplicatum poſſit Diametrum excedere: Diameter item multiplicata, Peripheriam: habebit rationem latus ad Diametrum: atque inde Diameter ad Peripheriam, licet incognitam. Atque ex hoc loco ſatis colligitur, Angulum, quem contactus vocauit

Euclides in xv Tertij, quantitatem non eſſe, quum multiplicatus nullam magnitudinem poſſit excedere: immò, quum multiplicari non poſſit: vt illic demonſtrauimus. Multiplicationem autem hoc loco accipiemus, pro eo augmento quod fit in partes, quas vocant homogeneas. Linea enim multiplicata, id eſt, aucta partibus ſui ſimilibus, lineam excedet: ſed non ſuperficiem: ſicq; ad ſuperficiem non habebit rationem.

Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ληφθέντα κατάλληλα.

6 In eadem ratione Magnitudines dicuntur eſſe, prima ad ſecundam vt tertia ad quartam: quum primæ & tertiæ æquemultiplicia, ſecundæ item & quartæ æquemultiplicia, fuerint primum ſecundo & tertium quarto ſecundùm quamuis multiplicationem, aut ſimul æqualia, aut ſimul majora, aut ſimul minora.

Quia in Geometricis plerumque Rationes occurrunt incognitæ: ſeu innominatæ: ad earum probationem, Æquemultiplicium officium nobis accerſimus: quæ quidem variè comparamus, vt ſcopum attingamus. Hoc igitur innuit Definitio, Si fuerint quatuor magnitudines, videlicet A prima, B ſecunda, C tertia, & D quarta: ſumantur autem ipſarum A & C æquemultiplicia E & F, itemq; ipſarum B & D alia vtcumque æquemultiplicia G & H: itaq; res cadat, ſi B & G ſeſe inuicem æquent, aut ſit alterum altero majus: etiam F & H ſeſe inuicem æquare, aut eſſe alterum altero majus: Erit tum A ad B, ſicut C ad D. Scilicet, ſi B & F per duplum auctis, ſed G & H, verbi cauſſa, per triplum: ſit E æquale G, & ſimul ſit F æquale H: aut ſi E ſit majus G, ſit ſimul F majus H: aut ſi minus, minus: idq; ſemper fiat, ſeu per triplum, ſeu per quadrup



druplum,ſeu per quamcumque denominationem ſumantur æquemultiplicia:erit omninò A ad B ſicut C ad D.Erat igitur hujus Definitionis ſententia : Quum primæ & tertiæ æquemultiplicia , aliaq; ſecundæ & quartæ vtcumque æquemultiplicia ſic fuerint , vt ſi multiplex primæ æquale fuerit multiplici ſecundæ , ſit & multiplex tertiæ æquale multiplici ipſius quartæ: & ſi majus,majus : & ſi minus,minus : Erit prima ad ſecundam, vt tertia ad quartam. Sed in hæc verba non pronunciauit Euclides , ne Theorematis ſpeciem daret,non Principij. Multò minus ſic pronunciauit,In eadem ratione Magnitudines dicũtur eſſe, prima ad ſecundam vt tertia ad quartam,quum primæ & tertiæ æquemultiplicia, ſecundæ item & quartæ æquemultiplicia , fuerint primum ad ſecundum , vt tertium ad quartum. Ignotum enim per æquè ignotum definiſſet.

At dices , Tam difficilis eſt, immò fortaſsè difficilior hujuſmodi æqualitas aut exceſſus Æquemultiplicium, quàm ſimplicium inter ſe ratio. Non eſt ſanè. Majorum enim Quantitatum facilior eſt comparatio , ob partium numerum. Multiplicia enim pro arbitrio collocare & accommodare poſſumus , & ex ipſorum artificioſa conſtructione, ſimplicium rationem colligere. Prætereà , quum duas Magnitudines duabus confero: vnum tamen vni confero , nempe rationem rationi : ſicq; intra binarium conſiſto. Quum verò multiplicia multiplicibus: quaternarium conſiderem oportet , nempè multiplex primæ, ſecundæ,tertiæ, & quartæ cum ſimplicibus ipſis. Atqui latiùs patet quaternarius binario. Quum igitur tractabiliora ſint æquemultiplicia, jure objiciõ n poterit,quòd ignotum per æquè ignotum oſtendatur. Huc accedit quòd quum mox egeremus Incõtinua Proportionalitate, ejus omninò fuit facienda mẽtio ſub Definitionis titulo:ne in Demonſtrationibus futuris ingenia auſcultantium interciperentur , re inaudita. Nemo itaque offendatur quòd Principium difficile ſit. Definitiones enim ſubtiles eſſe nihil vetat,præſertim quum res complicata definitur,qualis eſt ratio Magnitudinum. Nam & in traditionibus Dialecticis ſæpe euenit , vt Definitum celeriùs promptiusq; capiamus,quàm Definitionem ipſam.Nemo enim eſt qui priùs non capiat Hominem,quàm animal rationale. Quũ verò ſubſtantiam Hominis cognoſcere cupimus , tum nobis pleniùs

ſatisf

ſatisfacit Definitio.

Poſſunt autē ejuſdem eſſe generis Magnitudines: & poſſunt non eſſe. Dicemus enim, ſicut Linea ad Lineam, ita Lineam ad alteram: ſed & ſicut Linea ad Lineam, ita Superficiem ad Superficiem.

Neque omittendum duxi quòd hoc loco Euclides generatim locutus eſt, ſicut prima ad ſecundam ita tertia ad quartam: vt vtramque intelligeremus & Continuam & Incontinuam Proportionalitatem. Vtrobique enim quatuor ſunt Magnitudines: in hac expreſſæ, in illa tacitæ. Nam quum dicimus continuè, ſicut A ad B ita B ad C, quatuor ſunt Magnitudines. Nam ipſa B magnitudo, duarum vicem ſupplet, dum conſequitur & antecedit. Itaque non ex Euclidis ſententia fecerunt, qui Continuam Proportionalitatem ſeparatim definierunt: vt hîc Campanus quinta ſua Definitione. Nam quæ vtriuſque ſunt propria, hoc loco Euclides diſſimulauit, communiter ambas vna hac ſexta Definitione complexus.

Quod verò dicitur, primum ſecundo & tertium quarto: hunc ſenſum habet, vt inæqualitatis & exceſſus ratione, conferatur multiplex primæ, multiplici ſecundæ: & multiplex tertiæ, multiplici quartæ: licet initio multiplex primæ cum multiplici tertiæ: & multiplex ſecundæ cum multiplici quartæ conjungendum fuerit.

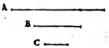
Hanc Definitionem quàm potuimus clariſſimè explicauimus: vt controuerſiam abigeremus ex hujus Quinti Definitionibus ortam. Nam qui in his Campanum reprehendunt, meo judicio non rectè reprehendunt. Neque enim Euclidem non intellexit: Sed dum voces eaſdem identidem inculcat (quæ res ferè vna Proportionum materiam obſcuram facit): ipſe in orationis implicationem ſe conjicit: ob Dialecticæ, vt apparet, ignorantiam. Vnicuique tamen quod liberè ſentiat de Campano relinquimus, dummodò nos Proportiones Geometricè tractemus.

Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογον καλείσθω.

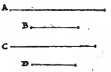
7 Magnitudines verò, quæ in eadem ſunt ratione, Proportionales dicuntur.

Quantit

Quantitates inter quas eſt rationum ſimilitudo, quæ anteà Proportionalitas vocata eſt, Proportionales dicuntur. Vt ſi fuerit A ad B ſicut B ad C: erunt A, B, & C proportionales. Atque hæc Proportionalitas Continua: nam inter ſingulas continuatur ratio, propterea quòd media conſequitur ad primam, & antecedit ad tertiam.



Si verò fuerit A ad B ſicut C ad D: erunt & hæ quatuor proportionales, ſed incontinuè: quia binæ diſtinguuntur, ac velut interrumpuntur. Singulæ enim vnicam habent denominationem aut Antecedentis aut Conſequentis.



Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον, μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

8 Quum multiplex primæ exceſſerit multiplex ſecundæ, multiplex verò tertiæ non exceſſerit multiplex quartæ: majorem rationem habere dicetur prima ad ſecundam, quàm tertia ad quartam.

Hæc manifeſta eſt ex Sexta. Scilicet, Quatuor Magnitudinum nunquam major eſt proportio primæ ad ſecundam quàm tertiæ ad quartam, quin contingat aliqua æquemultiplicia primæ & tertiæ collata ad aliqua ſecundæ & quartæ æquemultiplicia, ſic ſe habere, vt multiplex primæ excedat multiplex ſecundæ, neque multiplex tertiæ excedat multiplex quartæ. Neque hoc contingit vnquam quin major ſit proportio primæ ad ſecundam, quàm tertiæ ad quartam. Et hæc dicetur major Improportionalitas. Quum verò multiplex primæ minus fuerit, quàm multiplex ſecundæ: neque multiplex tertiæ minus fuerit, quàm multiplex quartæ: erit minor ratio primæ ad ſecundam, quàm tertiæ ad quartam. Atque hæc minor Improportionalitas dicetur.

Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν.

9 Proportionalitas, minimùm, in tribus eſt terminis.

Quia duarum Magnitudinum collatio tãtùm ratio eſt, non rationum ſimilitudo: fit vt duæ, Proportionalitatem non conſtituant: Tres itaque, minimùm, debent eſſe: Qui numerus Continuam ſemper Proportionalitatem cõſtituit. Poſſunt autem & in Continua quatuor eſſe quantitates: hoc eſt, tam impari quàm pari numero. At in Incontinua, neque pauciores quàm quatuor, neque impari ſunt numero. Quod qui attentiùs conſiderauerit, cõperiet Euclidem hac ratione inductum, Proportionalitatem Continuam & Incontinuam non ſeparaſſe.

Meminiſſe tamen oportet, Parem numerum præeſſe omni Proportionalitati. Nam quum dico vt A ad B ita B ad C: duarum rationum fit comparatio, vt anteà diximus. Itaque Binarij vim ſic innuit Euclides.

Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

10 Quum tres Magnitudines fuerint proportionales: dicetur proportio primæ ad tertiam ſicut proportio primæ ad ſecundam duplicata.

Definit Proportionalitatem trium Quãtitatum. Cujus Definitionis explicatio hæc eſt. In proportionalitate trium Quãtitatum, latet Quadrati natura. Scilicet tantum producunt duo extremi termini inter ſe, quantũ medius in ſe. Ob id, proportio extremorum inter ſe, eſt duplum proportionis primi ad ſecundum. Quod niſi per Numeros ſatis definitè exponi nequit. Sint 2 ad 4, vt 4 ad 8. Hæc eſt proportionalitas Continua in dupla ratione. Duco 2 in 8, fiunt 16: & tantundem producunt 4 in ſe. Itaque, ex definitione, erit proportio 2 ad 8, denominata à Quadrato Binarij, proportionem primi ad ſecundum denominantis: nempè quadrupla. In tripla ratione, ſint 2 ad 6 vt 6 ad 18. Denominationem proportionis primi ad ſecundum, nempè 3, duco in ſe: fiunt nouem, denominator proportionis 2 ad 18. Atque hæc eſt Definitionis ſententia: ex qua binarij, ternarij, & quaternarij elicitur mira colligatio. Nam

Nam in tribus Quantitatibus quatuor inſunt : atque hujus affinitatis, binarius eſt index. Hujus enim numeri ſingularis proprietas eſt, quòd tantùm efficiat duplicatus, quantum in ſe ductus. Ea re Euclides duplicatam proportionem dixit, quaſi Quadratam : propterea quòd binarius Quadrati eſt index : vt cæteræ denominationes naturam primæ ſequerentur : ſcilicet tripla proportio duplicata, eadem eſſet quæ in ſe ducta. Quadratũ itaq; per Binarium ſignificatur, ſicut Cubus per Ternarium, Quadratumquadrati, ſeu, vt vulgò dicunt, Cenſuscenſus, per Quaternarium: & Superſolidum, Relatum primum dicunt, per Quinarium : ſicq; infinitè : Quod nos ſatis luculenter expoſuimus in priore libro noſtræ Algebræ. Quum igitur Quantitatem quantitati comparamus, vnitas repræſentatur in Numeris : in Continuis, linea. Trium verò Quantitatum collatio in Numeris, Quadratum in Continuis, Superficiem: quatuor denique proportio in Numeris, Cubum : in Continuis, Solidum. Hæc autem ſpeculatio in immenſum patet. Hinc pendet Definitio ſequens.

Οταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

11 Quum quatuor Magnitudines continuè proportionales fuerint: dicetur proportio primæ ad quartam ſicut primæ ad ſecundam triplicata: ac ſemper ordine vna plus, donec ſit abſoluta proportionalitas.

Quatuor Quantitatum continua proportionalitas, Cubi includit naturam : ſicut trium, Quadrati, vt modò diximus. Cubi autem index eſt Ternarius. Proportio itaque primæ ad quartam, eſt proportio primæ ad ſecundam triplicata : nempè Denominatore in ſe cubicè ducto. Vt in Numeris, ſint 2 ad 4 vt 4 ad 8 & 8 ad 16. Denominator Proportionis, eſt Binarius. Duco itaque Binarium in ſe cubicè, fiunt 8 : & tanta eſt proportio primi ad quartum : ſcilicet. 2 ad 16, octupla. In quinque autem Poſitis, erit proportio Primi ad quintum quadrupla quàm Primi ad ſecundum: In ſex, quintupla : ſicq; continenter, donec ad vltimum par Magnitudinum perueniamus. Atque

hæc eſt Definitionis ſententia. Sed quia natura ſupra Corpus nihil habet quod ſenſui exponat, in Geometria non conſiderantur proportionalia vltra quatuor Poſita. In numeris autem, qui ſunt velut interpretes quidam rerum continuarum, vt omnia quæ formam habent, infinita eſſe oſtenderentur, apertè in immenſum exurgunt progreſſiones Proportionalitatum, omniumq́; ſpecierum quæ normam recipiunt: Quaſi ſenſus finitus, Intellectus verò interminatus eſſe comprobetur. Huc autem Numeros afferre fuit neceſſarium. Dupla enim & tripla ratio, Numerationem præ ſe fert: neque aliter quàm per Numeros expediri poteſt.

Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

12 Similis rationis Magnitudines dicuntur, Antecedentia antecedentibus & Conſequentia cōſequentibus.

Similitudinem Rationum anteà propoſuit: hoc eſt, Proportionalitatem: hîc ſimilis rationis Magnitudines, ſuis appellationibus nuncupat, ac ſi diceret, Magnitudines Proportionales ſignificantur, quatenus antecedunt & conſequuntur. Scilicet, ſumuntur æquemultiplicia Antecedentium, & æquemultiplicia Conſequentium: vt ex iis proportionalitatem Magnitudinum colligamus. Hanc itaque appoſuit Euclides, vt vocabula, quæ dicunt, artis exprimeret. Antecedentium autem & Conſequentium variæ ſunt comparationes: quæ Definitionibus ſequentibus explicantur.

Ἐναλλὰξ λόγος, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

13. Permutata Ratio, eſt acceptio Antecedentis ad antecedens, vt Conſequentis ad conſequens.

Prima comparatio Magnitudinum, quæ, pronūciatione naturali, eſt vnius Antecedentis ad ſuum Conſequens, ſicut alterius Antecedentis ad ſuum Conſequens, dux eſt atque origo

cæter

Digitized by Google

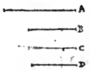


cæterarum comparationum: ac primùm Permutatæ: in qua mutatur ſecundum Antecedens in prius Conſequens, & prius Conſequens in ſecundum Antecedens.

Vt ſi fuerit A ad B ſicut C ad D: & concludatur, A ad C ſicut B ad D: hæc Permutata dicetur Ratio.

Ἀνάπαλιν λόγος, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου, πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

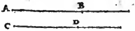
14 Conuerſa Ratio, eſt acceptio Conſequentis tanquam antecedentis, ad Antecedens tanquam conſequens.



In hac conuertuntur duo Conſequentia in duo Antecedentia, & contrà. Vt ſi fuerit A ad B ſicut C ad D: & concludatur conuerſo modo, B ad A ſicut D ad C.

Σύνθεσις λόγου, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνός, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

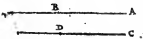
15 Conjuncta ſeu Compoſita Ratio, eſt acceptio Antecedentis cum conſequente inſtar vnius, ad ipſum Conſequens.



Vt ſi fuerit A ad B ſicut C ad D: & concludatur totum A B ad B ſicut totum C D ad D: dicetur Conjuncta ſeu Compoſita Ratio.

Διαίρεσις δὲ λόγου, ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

16 Diſiuncta ſeu Diuiſa Ratio, eſt quum augmenta Antecedentium ſupra Conſequentia, ad ipſa Conſequentia comparantur.



Vt ſi fuerit totum A B ad B ſicut totum C D ad D: & concludatur, A ad B

ſicut C ad D. Et eſt conuerſus modus Conjunctæ.

Ἀναστροφὴ λόγου, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

17 Euerſa Ratio, eſt quum Antecedentia comparantur ad exceſſus quos habent ſupra Conſequentia.

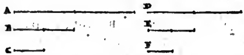


Euerſio Rationum, fit quum Antecedens comparatur cum ea quam habet ad Conſequens differentia. Vt ſi fuerit A B ad B ſicut C D ad D: & concludatur, ſicut A B ad A, ita C D ad C.

Δι᾽ ἴσου λόγος ἐστὶ πλειόνων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανομένων, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. ἢ ἄλλως λῆψις τῶν ἄκρων, καθ᾽ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

18 Æqua ratio dicitur, quum plures Magnitudines hinc inde æquali numero ſumptæ, & binæ comparatæ fuerint: tum æquali mediorum numero ſublato, fit extremorum vtrimque comparatio.

Vt ſi ſumantur Magnitudines A, B, & C: aliæq; totidem D, E, & F: ſiue ſint ejuſdem generis cum primis, ſiue diuerſi: fuerintq; ſecundæ inter



ſe in eadem ratione qua primæ: ſiue eodem ordine, vt ſi dicatur A ad B ſicut D ad E, & B ad C ſicut E ad F: ſiue ordine conuerſo, vt ſi dicatur A ad B ſicut E ad F, & B ad C ſicut D ad E: atq; omiſſis mediis vtriſq; B & E, concludatur A ad C ſicut D ad F: Hæc argumentandi ratio dicetur, ab Æqua Proportionalitate.

THEOR.

THEOREMA PRIMVM,

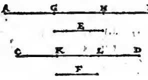
PROPOSITIO PRIMA.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Si quælibet Magnitudines totidem Magnitudinum ſingillatim æquemultiplices fuerint: quàm multiplices ſunt ſingulæ ſingularum, tam multiplices erunt omnes omnium.

Sint Magnitudines A B & C D, totidem Magnitudinum E & F æquemultiplices: ſcilicet A B ipſius E, & C D ipſius F. Dico, quàm multiplex eſt A B ipſius E, & C D ipſius F: tam multiplices eſſe ambas A B, C D, ambarum E, F.

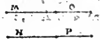
Quoniam enim æquemultiplex eſt A B ipſius E, vt C B ipſius F: quot in A B ſunt Magnitudines, æquales ipſi E, totidem erunt & in C D ipſi F æquales. In A B igitur ſint Magnitudines A G, G H, & H B, æquales ipſi E: & in C D ſint totidem numero Magnitudines, C K, C L, & L D, æquales ipſi F.



Quum itaque multitudo Magnitudinum in A B & in C D ſit eadem: ſitq; A G ipſi E æqualis, & C K ipſi F: erunt, per communem Notionem, duæ A G & C K ſimul ſumptæ, duabus E & F ſimul ſumptis æquales. Quumq; G H ſit eidē E æqualis: & K L eidem F: erunt quoq; G H & K L ſimul ſumptæ, ipſis E & F ſimul ſumptis ęquales. Atq; eadem ratione H B & L D ſimul ſumptæ, iiſdem E & F ſimul ſumptis æquales. Quot igitur in A B ſunt Magnitudines ęquales ipſi E, quotq; in C D ipſi F: tot ſunt in A B & C D ſimul ſumptis, ipſis E & F ſimul ſumptis ęquales. Quāmultiplex igitur eſt A B ipſius E, & C D ipſius F: tam multiplices ſunt A B, C D, ipſarum E, F: Quod erat oſtendendum.

QVVM autem hujus primæ Propoſitionis vim rationemq; perpend

perpenderimus, totam in communi judicio ſitam eſſe intelligemus. Nam quum dicitur, Si æqualibus æqualia addantur, conjuncta æqualia fieri: nihil aliud quàm æqualitas proportionum ſignificatur. Scilicet, ſi fuerit M æqualis N: & O æqualis P: quatuor habeo Quantitates proportionales. Eſt enim ſicut M



ad N, ita O ad P. Si igitur addamus O ipſi M, & P ipſi N: fiet totum M O, æquale toti N P. Ita, quum dico A B triplum eſſe ipſius E, & C D ipſius F: hoc tacitè dico, ſi A B addatur ad C D, & E addatur ad F: totum A B, C D, eſſe triplum totius E, F. Sic æqualitas omnes Proportionum ſpecies dirigit & gubernat. Ac quemadmodum æqualitas æquilateri addita, æqualitatem conſeruat: ita multiplicitas, vt ſic dicam, multiplicitati addita, proportionalitatem retinet ſimilem. Sed in quatuor Magnitudinibus aut pluribus æqualibus, nihil refert quæ cui præponatur: Mutato enim ordine, non mutatur denominatio. Quum verò occurrit inæqualitas, diſtinctiùs animaduertendum eſt. Majori enim arte opus eſt, in iis, quæ non ordine collocata, confuſionem parere ſolent. Tota igitur Proportionum materia ferè in communi intelligentia conſiſtit. Nam quòd tam difficilis habita ſit, ex præſumpta quadam opinione factum eſt. Proportionum enim tractatio obſcura non eſt: ſed eam ad vſum traducere, id demùm operoſum eſt. Aliud enim eſt artem tenere, & aliud ad rem ſuam conuertere. Sicut in rebus gerendis, quid optimum ſit multi in otio ſcienter diſputant. At quum in rem præſentem ventum eſt: quod ex vſu eſt, vix vnus aut alter exequi meminit. Multas itaque Propoſitiones in hunc Quintum Librum Euclides contulit, quæ pro Principiis habendæ fuerant. Sed id exquiſitè fecit, vt ſignificaret, Propoſitionum quidem cognitionem in medio eſſe poſitam, ſed earum vſum difficilem. Hunc igitur Librum diligenter amplectantur qui Geometriam ſeriò facere volent. Geometria enim quantacumque eſt, tota in Proportionibus eſt: neque aliud quicquam ſpectat, quàm vt Lineas Lineis, Superficies Superficiebus, & Corpora Corporibus componat & comparet. Atque hæc in hac prima Propoſitione præfari, non abs re nobis viſum eſt.

THEOREMA 1, PROPOSITIO II.

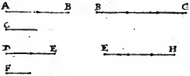
Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ

δὲ

ᾖ δὲ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον, δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex vt tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æquemultiplex vt ſexta quartæ: prima quoque & quinta, ſecundæ æquemultiplex erit vt tertia & ſexta quartæ.

In hac de ſex Magnitudinibus agitur. Sit itaque A B prima, C ſecunda, D E tertia, F quarta: B G quinta, & E H ſexta: ſitq; prima A B, ſecundæ C, vt tertia D E, quartæ F æquemultiplex: Et quinta rurſus B G, ejuſdem C ſecundæ: vt ſexta E H, ejuſdem F quartæ æquemultiplex. Dico compoſitam ex prima & quinta, ſcilicet A G, ipſius ſecundæ C æquemultiplicem, vt compoſitam ex tertia & ſexta, ſcilicet D H ipſius quartæ F.

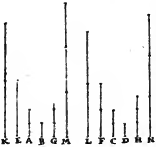


Quoniam enim A B ipſius C æquè eſt multiplex, vt D E ipſius F: quot in A B ſunt Magnitudines ipſi C æquales, tot & in D E ipſi F. Rurſus quoniam B G æquè eſt multiplex ejuſdem C, & E H ejuſdem F: quot in B G ſunt Magnitudines ipſi C æquales, tot & in E H eidem F. Quot igitur ſunt Magnitudines in tota A G ipſi C æquales, tot ſunt & in tota D H ipſi F æquales. Quammultiplex igitur eſt compoſita A G, ipſius C ſecundæ, tam multiplex eſt, per antecedentem, compoſita D H, ipſius F quartæ: Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 3, PROPOSITIO III.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου· καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Si primum ſecundi æquè fuerit multiplex vt tertiũ quarti, ſumantur autem æquemultiplicia primi & tertij: erunt quoque multiplex primi, ad ſecundum, &



Sumantur K ad E & L ad F: itémque M ad G & M ad H, æquemultiplicia. Et quia E & F ſunt ipſorum A & C æquemultiplicia: itemq; K & L ipſorum E & F æquemultiplicia, erunt, per antecedentem, K & L ipſorum A & C æquemultiplicia: ac per eandem, M & N ipſorum B & D ęquemultiplicia. Quare, per conuerſionem ſextæ Definitionis, K ad M & L ad N ſimiliter ſe habebunt in addendo, minuendo, & æquando. Quia ergo K & L, ipſorum E & F ſunt æquemultiplicia: itémque M & N ipſorum G & H: erit, per eandem directam, E ad G ſicut F ad H: Quod erat demonſtrandum.

LEMMA, ſeu ſumptio. Quoniam igitur conſtitit, ſi K excedit M, etiam L excedere N: & ſi æquale, æquale: & ſi minus, minus: atque ob id, ſi M excedit K, etiam N excedere L: & ſi æquale, æquale: & ſi minus, minus: Erit ex hoc, G ad E & H ad F eadem ratio. Hinc conſequitur,

Si quatuor Magnitudines proportionales fuerint, conuerſo quoque modo proportionales erunt.

Hoc eſt, ſi fuerit ſicut A ad B, ita C ad D: erit & ſicut B ad A, ita D ad C. Hæc igitur Conuerſam rationem probat, quam in decimaquarta Definitione poſuerat Euclides.

THEOREMA 5, PROPOSITIO V.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Si Magnitudo Magnitudinis æquè fuerit multiplex vt ablata ablatæ: erit & reliqua reliquæ tam multiplex, quàm tota totius.

Sit tota A B totius C D æquemultiplex, vt ablata A E ablatæ C F. Dico reliquam E B reliquæ D F tam multiplicem, quàm eſt tota A B totius C D.



Quàm multiplex eſt A B ipſius C F, tam multiplex fiat E B ipſius C G. Eritq; per primam hujus, quàm multiplex A E ipſius C F, tam multiplex A B ipſius G F. At quàm multiplex eſt A B ipſius C F, tam multiplex eſt A B ipſius C D, per hypotheſin. Et A B igitur vtriuſque G F & C D, eſt æquemultiplex. Æqualis eſt itaq;, per cõmunem Notionem, G F ipſi C D: quapropter ablatâ communi C F: erit reliqua G C, reliquæ F D æqualis. Sed E B æquemultiplex poſita eſt ipſius G C vt A E ipſius C F. Igitur tam multiplex eſt E B ipſius F D, quàm multiplex eſt A E ipſius C F. Atqui, per hypotheſin, A E tam multiplex eſt ipſius C F, quàm tota A B totius C D. Et E B igitur ipſius F D tam multiplex, quàm tota A B totius C D: Quod erat demonſtrandum.

HÆC Demonſtratio, vt vulgata, ita certa eſt. Sed tamen quia id exigit, quod nondum docuit Euclides: ſcilicet vt tam multiplex fiat E B ipſius C G, quàm multiplex eſt A E ipſius C F: ſcrupulo non vacat, apud eos præſertim qui res perſpicaciùs examinant. Nam ſi linea A E eſſet, verbi gratia, triplex ipſius C F: qua ratione fiet E B triplex ipſius C G, quum id non antè doceat Euclides quàm in duodecima Sexti? Duriuſculum enim eſt vt id cogamur facere aut concedere, quod poſteriùs erit ediſcendum.

Huic igitur objectationi ſic occurremus, vt dicamus hanc diuiſionem in hunc locum tantùm recipi doctrinæ gratiâ: ſcilicet vt procedat Demonſtratio, non quò ſit ad vſum præſentem exquiſitè neceſſaria. Ponimus enim Lineam Lineæ æqualem: licet hujuſmodi æquationem nondum didicerimus. Sunt enim hypotheſes liberæ: vt diſciplinarum fundamenta jaciantur.



Sed tamen hunc ſcrupulum vitabimus hac ratione. Sit Magnitudo A B Magnitudinis C D æquemultiplex, vt ablata A E ablatæ C F. Dico reliquam E B reliquæ D F æquemultiplicem, vt totam A B totius C D.

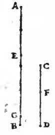
Quàm multiplex eſt A E ipſius C F, tam multiplex ponatur A G ipſius F D. Eritq;, per primam hujus, quàm multiplex A E ipſius C F, tam multiplex E G ipſius C D. Sed ſic fuit multiplex A B ejuſdem C D. Sunt igitur E G & A B æquales. Communis auferatur A E: erit A G ipſi

E B

E B æqualis. Et quia ſicut A E ad C F (ob idq́; , ſicut A B ad C D) ita A G ad F D : erit & ſicut A B ad C D, ita E B ad C F : Quod erat demonſtrandum.

ALIVD igitur eſt , lineam terminatam & coactam (qualis hoc loco eſt E B) in partes neceſſarias ſecare:& aliud,lineæ terminatæ,qualis eſt F D, partes æquales creare,vt in A G. Demonſtrationem tamen aliorum nolui omittere : quòd ſubtilis ſit,& ad ſimiles reperiendas ingenium acuat.

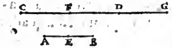
Probabimus & ab impoſſibili. Sit tota A B totius C D tam multiplex , quàm ablata A E ablatæ C F. Dico reliquam E B reliquæ D F tam multiplicem , quàm tota eſt A B totius C D.



Si enim non tam ſit multiplex,erunt in E B aut plures aut pauciores Magnitudines ipſi F D æquales, quàm in A E ipſi C F. Sint ergo , ſi poſſint , plures: Et ponatur E G tam multiplex ipſius F D, quàm A E ipſius C F. Eritq́; , per primam hujus , tam multiplex A G ipſius C D , quàm A E ipſius C F. Sed A B poſita eſt tam multiplex ipſius C D, quàm eadem A E ejuſdem C F. Erit igitur,per communem Notionem,A G ipſi A B æqualis , pars toti : Quod eſt abſurdum. Simili argumentatione probabimus pauciores non eſſe Magnitudines in E B æquales ipſi F D,quàm in A E, ipſi C F. Sunt igitur totidem multitudine. Quare & totidem quot in tota A B toti C D: Quod fuit demonſtrandum. Hoc Theorema Campanus ſic proponit.

Si fuerint duæ Quantitates, quarum vna ſit pars alterius,minuaturq́; ab vtraque ipſarum ipſa pars:erit reliquum reliqui vt totum totius æquemultiplex.

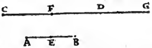
Partem hoc loco pro Submultiplici ſumit. Sit itaq; Quantitas A B tanta pars Quantitatis C D,quanta E B ipſius A B:minuaturq́; A B ex Quantitate C D, & reliquum ſit F C: vt F D ſit æqualis A B. minuatur etiam E B ex Quantitate A B, & ſit reliquum E A. Dico reliquum F C tam multiplex eſſe reliqui A E , quàm multiplex eſt totum C D totius A B.



Quum enim F D ſit æqualis A B, erit F D ita multiplex E B vt C D eſt multiplex A B. Ponam itaque D G

 tam

tam multiplicem A E, quàm F D eſt multiplex E B. Eritq́;, per



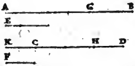
primam hujus, F G tam multiplex A B, quàm F D eſt multiplex E B. Et quia ſic fuit C D multiplex A B, vt F D multiplex E B: erit vtraque duarum Quantitatum C D & F G æqualiter multiplex Quantitatis A B. Quapropter, ex communi Notione, C D & F G ſunt æquales. Dempta igitur F D ab vtraque ipſarum: erit C F æqualis D G. Et quia D G ſic fuit multiplex A E ſicut F D multiplex E B: ob id, ſicut A B multiplex E B: ob idq́; ſicut C D multiplex A B: erit C F ita multiplex A E vt tota C D totius A B: Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 6, PROPOSITIO VI.

Ἐὰν δύο μεγέθη, δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Si duæ Magnitudines duarum Magnitudinum æquemultiplices fuerint, auferanturq́; aliquæ earumdem æquemultiplices: erunt & reliquæ vel eiſdem æquales, vel ipſarum æquemultiplices.

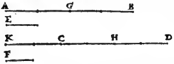
Sint duæ Magnitudines, A B quidem, Magnitudinis E: & C D, Magnitudinis F æquemultiplices: & ablatæ ex his A G & C H, earundem E & F æquè ſint multiplices. Dico reliquas G B & H D eiſdem E & F aut æquales, aut ipſarum æquemultiplices.



Sit enim primùm G B æqualis ipſi E. Dico & H D ipſi E eſſe æqualem. Ponatur ipſi F æqualis C K. Et quoniam æquemultiplex eſt A G ipſius E vt C H ipſius F: æqualis autem G B ipſi E, & C K ipſi F: æquè igitur, per primam hujus, eſt multiplex A B ipſius E, vt H K ipſius F. Æquè autem ponitur multiplex A B ipſius E, vt C D ipſius F. Æqualis igitur eſt H K ipſi C D. Communis auferatur C H. Reliqua igitur C K, reliquæ H D eſt æqualis. Sed F ipſi C K eſt æqualis. Quare & F ipſi H D eſt æqualis: Quod erat oſtendendum.

Si

Si verò G B ſit multiplex ipſius E : ponam C K ipſius F æquemultiplicem. Eritq́;, vt priùs, A B ipſius E æquemultiplex, per primam hujus, vt H K ipſius F. Sed & ſic poſita fuit æquemultiplex A B ipſius E vt C D ipſius F. Erit igitur H K ipſi C D æqualis:



Et ablata communi C H, reliqua C K, reliquæ H D æqualis. Quare quum G K ſit ipſius F æquemultiplex vt G B ipſius E : erit & H D ipſius F æquemultiplex vt G B ipſius E : Quod fuit demonſtrandum.

HÆC Demonſtratio prima ſpecie videbitur non planè ſatisfacere menti Euclidis. Nego enim, inquiet aduerſarius, ablatam G B poſſe eſſe æqualem ipſi E : nego id quoque, poſſe eſſe multiplicem ejuſdem. quin tu hoc proba.

Sed id propiùs intuenti probatione non indigebit. Nam quum A B ſit multiplex ipſius E: erunt aliquot Magnitudines in A B æquales ipſi E. Quumq́; A C itidem ſit multiplex ipſius E: erunt & aliquot Magnitudines in A C æquales ipſi E, ſed pauciores quàm in A B. Supererit ergò, vt reliqua G B ſit æqualis ipſi E, aut ejuſdem multiplex.

VT tamen omni ex parte integram demus Demonſtrationem, Sit Magnitudo A B, Magnitudinis C D multiplex ęqualium partium (ſcilicet C D contineatur aliquoties in A B, vt nihil ſuperſit):



Et ex A B auferatur A E, quæ ſit multiplex & æqualium partium ejuſdem C D Dico reliquam E B, eidem C D aut eſſe æqualem, aut ipſius multiplicem æqualium partium.

Si enim neque ſit æqualis, neque multiplex: ponatur E F ipſi C D æqualis: vt reliqua F B ſit minor C D, ſi fieri poſſit. Et diuidatur A E in Magnitudines ipſi C D æquales: ſcilicet in A G, & G E. Quoniam igitur A G, G E, & E F ſunt ipſi C D æquales, ſed F B minor ipſa C D: non diuiditur ergò tota A B in partes ipſi C D æquales. Non eſt igitur ipſius multiplex æqualium partium, quod eſt contra hypotheſin. Addidi æqualium partium propter id quod diximus initio Definitionum, verbum Multiplicis, etiam ad inæqualitatem extendi. Sed inter docendum, ob facilitatem aſſumuntur æqualia Multiplicia. inæqualium enim, nempè

Digitized by Google

nempè Superpartientium & Superparticularium, tædioſa & obſcura eſt diuiſio. Sed tamen vtrobiq; ratio eadem.

THEOREMA 7, PROPOSITIO VII.

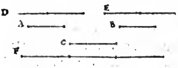
Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ, τὸ αὐτὸν ἔχει λόγον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Æquales, ad eandem habent eandem rationem: & eadem ad æquales.

Sint æquales Magnitudines A & B: alia autem quæuis Magnitudo C. Dico vtramque A & B, ad ipſam C eandem habere rationem: Et C, eandem rationem habere ad vtramque.

Sumantur ipſarum A & B æquemultiplices D & E: ipſius verò C, alia vtcunque multiplex F. Quoniam igitur æquemultiplex eſt D ipſius A vt E ipſius B: æqualis autem eſt A ipſi B: æqualis igitur, per communem Notionem, erit D ipſi E. Si ergo excedit D ipſam F, excedit & E eandem F: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Eſt igitur vt A ad C, ſic B ad C, per ſextam Definitionem hujus: Quod eſt prius.

Dico etiam C ad vtramque ipſarum A & B, eandem habere rationem. Nam iiſdem poſitis, erit, ex communi ſententia,



æqualis D ipſi E. Si igitur excedit F ipſam D, excedit & ipſam E: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Quare, per eandem ſextam Definitionem, erit ſicut C ad A, ita C ad B: Quod erat demonſtrandum.

Hoc poſterius poterit expeditiùs demonſtrari. Nam quum conſtiterit ſicut D ad C, ita E ad C: erit conuerſo modo, per Conſectarium quartæ hujus, ſicut C ad A, ita C ad B. Et hoc Theorema ex iis eſt, quæ inter animi ſenſa habenda eſſe videbantur.

THEOREMA 8, PROPOSITIO VIII.

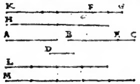
Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

Inæqualium Magnitudinum major ad eandem, majorem

jorem habet rationem, quàm minor: Et eadem ad minorem, majorem habet rationem, quàm ad majorem.

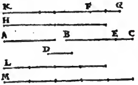
Sint duæ Magnitudines inæquales, A & B C, quarum major B C: ſit autem tertia Magnitudo D. Dico, majorem eſſe rationem B C ad D, quàm A ad eandem D: Contrà, majorem eſſe rationem D ad A, quàm D ad B C.

Ad prioris partis demonſtrationem, intelligendæ ſunt B C prima, D ſecunda: A tertia, & rurſus D quarta. Deinde primæ & tertiæ æquemultiplicia, itemq; ſecundæ & quartæ ſic conſtituenda: vt multiplex primæ excedat multiplex ſecundæ, mul-



tiplex verò tertiæ non excedat multiplex quartæ: juxta ſententiam octauæ Definitionis. Quod hac ratione fiet. Quoniam major eſt B C quàm A: ponam B E ipſi A æqualem: ac eouſque multiplicabo æqualiter vtramq; partem E C & E B, vt ex E C proueniat quantitas major quàm D: quæ ſit F G: & ex E B, quantitas non minor quàm eadem D: quæ ſit F K. Eritq;, propter æqualem multiplicationem, F K tam multiplex E B, quàm F G multiplex E C: ob idq;, per primam hujus, erit tota G K totius B C æquemultiplex vt F K ipſius E C. Ponam inſuper H tam multiplicem ipſius A, quàm G K ipſius B C, ac per hoc, quàm F K ipſius E B. Eruntq; F K & H æquales: quum vtriuſque ſubmultiplices poſitæ ſint æquales. Quia igitur F K non eſt ipſa D minor: neque H eadem D minor erit. Nunc autem multiplico D, donec proueniat quantitas proximè major quàm H. Scilicet ſumo duplum ipſius D: inde triplum: ac deinceps vno plus, quoad proueniat quantitas M, proximè major quàm H. Sumo poſtmodum ipſius D multiplicem quantitatem proximè minorem multiplici M: quæ ſit L: vt ipſa M conſtet ex L & D. Eritq; L non minor quàm H: quum M ſit proximè major ipſa H. Quumq; H ſit æqualis F K: non erit F K minor L: Neque item F K & D, minores erunt quam L & D: ac propterea non minores quàm M. Et quia F G eſt major D: erit tota G K major M. Quumq; ad primam B C & tertiam A, ſumptæ ſint æquemultiplices G K & H: ad ſecundam verò & quartam (quæ eſt eadem D) æquemultiplex M ſumpta ſit,

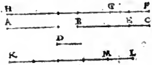
inſtar duarum: & G K multiplex primæ excedat M multiplex ſecundæ, neque H multiplex tertiæ excedat eandem M multiplicem quartæ: Erit, per octauam Definitionem hujus, major proportio B C ad D, quàm A ad eandem D: Quod eſt prius.



Secundum autem demonſtratur ex eadem Definitione, conuerſo ordine Magnitudinum: vt D ſit prima, A ſecunda: D rurſus tertia, & B C quarta. Excedit enim M multiplex primæ, H multiplicem ſecundæ: neque eadẽ M multiplex tertiæ, excedit G K multiplicem quartæ. Quare major eſt proportio D ad A, quàm D ad B. Sicq; patet tota Propoſitio.

HANC Campani Demonſtrationem, quum paulò eſſet clarior Demonſtratione Theonis, aliquanto etiam clariorem fecimus. Quæ ſic tamen obſcura eſt. In quo mirari ſubit, quum hujus Quinti Libri Propoſitiones in communi intelligentia poſitæ ſint, ſicut anteà monuimus, ac prima ſpecie quendam veluti conſenſum in animis pariant: quòd tam implicatè demonſtrentur. Huic igitur loco rurſus compendium ſimul & lucem attulimus.

Sint duæ Magnitudines A & B C, quarum major B C: ſitq; tertia quantacumque Magnitudo D. Dico majorem eſſe rationem B C ad D, quàm A ad D.



Intelligantur, vt priùs, B C prima, D ſecunda, A tertia, & rurſus D quarta. Earumq; parentur æquemultiplicia ad hunc modum. Quoniam major eſt B C, quàm A: pono E B ipſi A æqualem: Et vtramque E C & E B æqualiter ſic multiplico, vt ex E C proueniat quantitas major quàm D: quæ ſit F G: & ex E B, quantitas non minor quàm eadem D: quæ ſit G H. Eritq;, propter æqualem multiplicationem, G F æquemultiplex ipſius E C vt G H ipſius E B: ob idq;, per primam hujus, tam multiplex eſt G H ipſius E B, ſicq; ipſius A, quàm tota F H totius B C. Habeo itaque F H æquemultiplicem ipſius B C primæ, & G H ipſius A tertiæ. Nunc autem multiplico D donec exurgat quantitas proximè major quàm G H: ſcilicet ſumo ipſius D duplum,

indè

indè triplum : ac continenter vno plus. Et produco K L, quæ ſit prima multiplex, major ipſa G H. Et ex K L, reſeco L M ſimplum & æquale ipſi D. Eſt igitur K L ipſius D vtcumque multiplex, inſtar duarum, quatenus eſt D ſecunda & quarta. Et quoniam K L eſt proximè major ipſa G H : non erit eadem G H minor K M. Et quia F G eſt major D, & L M eidem D æqualis : excedet F H multiplex primæ, ipſam K L multiplicem ſecundæ. Sed quum K L poſita ſit major quàm G H : non excedet ipſa G H multiplex tertiæ, K L multiplicem quartæ. Quare, per octauam Definitionem hujus, major eſt ratio B C, ad D, quàm A ad D : Quæ eſt prior pars Theorematis.

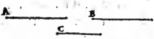
Altera autem modò probata eſt : ſcilicet ex eadem Definitione, conuerſo ordine Magnitudinum & Multiplicium.

THEOREMA 9, PROPOSITIO IX.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, κἀκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Quæ ad eandem habent eandem rationem, Magnitudines, inter ſe ſunt æquales : Et ad quas eadem habet eandem rationem, eæ quoque ſunt æquales.

Sit duarum Magnitudinum A & B eadem ratio ad C Magnitudinem. Dico A & B eſſe æquales. E conuerſo, ſi eadem ſit ratio C ad vtramque earum : dico & ſic ipſas eſſe æquales. Conuerſa ſeptimæ hujus.



Prior pars ſic probatur. Si enim non ſunt æquales : erit altera ipſarum, vt A, major. Et erit, per priorem partem antecedentis, major ratio A ad C, quàm B ad C, contra hypotheſin. Secunda verò ſic. Si A eſt major B : erit, per ſecundam partem antecedentis, major ratio C ad B, quàm C ad A, contra hypotheſin.

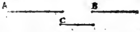
THEOREMA 10, PROPOSITIO X.

Τὸν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστι.

Quæ duarum Magnitudinum ad eandem majorem

rationem habet, hæc major eſt. Ad quam autem duarum, eadem majorem rationem habet, hæc minor eſt.

Si fuerit ratio major A ad C, quàm B ad D: dico A eſſe majorem B. Si verò fuerit ratio major C ad B, quàm C ad A: dico econtrariò B majorem eſſe quàm A. Conuerſa octauæ.



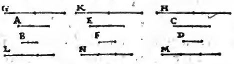
Prior pars conſtat ex priori parte ſeptimæ & priori octauæ. Nam per priorem ſeptimæ, non erit A æqualis B: Et per priorem octauæ, non erit minor. Secunda verò patet ex ſecundis partibus earundem.

THEOREMA 11, PROPOSITIO XI.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγοι οἱ αὐτοὶ, ϗ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Quæ eidem ſunt æquales rationes, & inter ſe ſunt æquales.

Sit ratio A ad B & ratio C ad D, vtraque æqualis rationi quæ eſt E ad F. Dico duas rationes A ad B & C ad D eſſe æquales: eſſe ſcilicet ſicut A ad B, ita C ad D.



Sumantur G ad A, & H ad C, & K ad E æquemultiplices: irémque L ad B, & M ad D, & N ad F, aliæ vtcumque æquemultiplices. Et quia ponitur E ad F ſicut A ad B, & ſicut C ad D: erit, per conuerſam ſextæ Definitionis bis ſumptam, ſi K excedat N, vt G excedat L, & H excedat M: & ſi æquale, æquale: & ſi minus, minus. Si igitur G excedat N, excedet H ipſum M: & ſi æquale, æquale: & ſi minus, minus. Quare, per ſextam Definitionem, erit vt A ad B, ita C ad D: Quod erat probandum.

IN hac demonſtratur idem, vt dicitur, per idem. Tam enim confeſſa eſt ſimplicium comparatio, quàm exceſſus & æqualitas Æquemultiplicium: quamuis aliter probari poſſe non negem. Sed quorsùm? quum ſit animi ſenſum ac ſub eo Principio audiatur: Quæ eidem ſunt æqualia, inter ſe ſunt æqualia? Quod certè ita generale eſt & vniuerſum, vt in omni arte,

in

in omni ſpecie, in omni denique ingenij exercitatione, aſſenſionem & probationem præ ſe ferat. Sed tamen hujuſce rei defenſionem jam antè occupauimus in prima hujus.

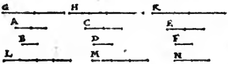
THEOREMA 12, PROPOSITIO XII.
Campano 13.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα, πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

Si ſingulæ Magnitudines ad ſingulas eandem habeant rationem: erunt, ſicut vna antecedentium ad vnam conſequentium, ſic omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

Quod prima propoſuit de multiplicibus, hæc in vniuerſum de quibuſcumque Magnitudinibus.

Sint Magnitudines ſingulæ A, C, E, ad ſingulas B, D, F, eandem rationem habentes: nempè ſicut A ad B, ita C ad D & E ad F. Dico eſſe ſicut A ad B, ita omnium ſimul A C E, ad omnes ſimul B D F.



Sumantur ipſarum A, C, E, æquemultiplicia G, H, K: & ipſarum B D, F, alia vtcumque æquemultiplicia L, M, N. Eritque, per primam hujus, totum ex G, H, K, ita multiplex totius ex A, C, E, vt G eſt multiplex A: itidemq; totum ex L, M, N, ita multiplex totius ex B, D, F, vt L eſt multiplex B. Et, per conuerſionem ſextæ Definitionis bis ſumptam, ſi G excedit L, & H excedet M, & K excedet N: & ſi æquale æquale: & ſi minus, minus. Itaque, per communem Notionem, ſi G excedit L: excedit & totum ex G, H, K, totum ex L, M, N: & ſi æquale, æquale: & ſi minus, minus. Quare, per eandem Definitionem, erit ſicut A ad B, ita totum ex A, C, E, ad totum ex B, D, F: Quod erat probandum.

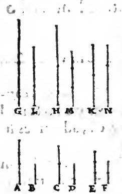
THEOREMA 13, PROPOSITIO XIII.
Campano 12.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον;

τον· τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Si primæ ad ſecundam eadem fuerit ratio, quæ tertiæ ad quartam: tertiæ verò ad quartam major fuerit ratio, quàm quintæ ad ſextam: primæ quoque ad ſecundam major erit ratio, quàm quintæ ad ſextam.

Sit eadem ratio A ad B quæ C ad D: major autem C ad D, quàm E ad F. Dico majorem quoque eſſe rationem A ad B quàm E ad F.



Sumam G ad A, & H ad C æquemultiplicia: Itemq; L ad B, & M ad D, & N ad F, alia æquemultiplicia.

Et quia eadem eſt ratio C ad D quæ eſt A ad B, ſed major quàm E ad F: erit, per conuerſionem ſextæ Definitionis, ſi H excedit M, vt G neceſſariò excedat L. At, per conuerſionem octauæ Definitionis, ſi H excedit M, non neceſſariò K excedet N. Si igitur G excedit L, non neceſſariò K excedet N. Quare major eſt ratio A ad B, quàm E ad F: Quod fuit probandum.

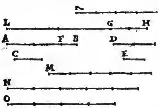
Hoc autem totum nil aliud eſt, quàm Si fuerint duo inter ſe æqualia, vnum verò illorum tertio quopiam majus: erit & reliquum tertio majus.

Ex Campano. Quòd ſi ſit eadem ratio A ad B quæ C ad D, ſed C ad D major quàm E ad F: erit & A ad B major quàm E ad F. Nam ſi ſit C ad D minor quàm E ad F: erit E ad F major quàm C ad D. Per conuerſionem igitur majoris Improportionalitatis, ſi K excedit N, non neceſſariò H excedet M. Sed ſi H non excedit M, neque G excedet L. Per Definitionem igitur majoris Improportionalitatis, major erit proportio E ad F, quàm A ad B. Itaque econuerſò, minor erit A ad B, quàm E F: Quod erat oſtendendum. Sed hoc non admodùm exquiſitæ probationis. Quod autem ſequitur majoris eſt momenti.

Si fuerit prima quatuor Quantitatum, ad ſecundam major ratio, quàm tertia ad quartam: aliqua erunt æquemultiplicia primæ & tert

& tertia, qua quum comparabuntur ad aliqua æquemultiplicia ſecunda & quartæ, inuenietur multiplex prima majus eſſe multiplici ſecunda: non autem multiplex tertia, multiplici quarta, Quod ſic probatur:

Sit major proportio A B ad C, quàm D ad E. Ponaturq; proportio A F ad C ſicut D ad E. Et erit, per hanc & decimam, A F minor A B. Et ſit minor in quantitate F B. Hanc F B multiplicabo, donec proueniat quantitas major C: quæ ſit G H: hac lege, vt D toties multiplicata, producat quantitatem non minorem



E: quæ ſit K. Tunc faciam vt L G ſit tam multiplex A F, quàm G H eſt multiplex ipſius F B, aut K ipſius D. Eritq; per primam hujus, L H ita multiplex ipſius A B vt K ipſius D. Ponam poſtmodùm M primam quantitatem multiplicem E, quæ ſit major K: & ponam N ita multiplicem C, vt M eſt multiplex E. Eritq;, ex poſitionibus, & ex conuerſione ſextę Definitionis, quantitas N prima multiplicium C, quæ erit major L G: nec erit L G minor C. Sumam itaque ſub N, maximam multiplicium C: aut ipſi æqualem, ſi fortè N ſit prima multiplicium illius: quæ ſit O: Conſtabitq; N, ex O & C. Quia ergo L G non eſt minor O, & G N eſt major C: erit L H major N. Quare quum K ſit minor M, patet propoſitio.

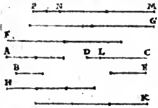
Hæc Campanus. Cujus breuitatem ferè vbique laudaui. Hîc verò ob compendium, manca apparet Demonſtratio. Non enim ſatis explicat, quantitatem N eſſe primam multiplicium quæ ſit major L G. Hoc igitur probandum fuit ex quarta hujus. Quum enim ſit ſicut D ad E: ita A F ad C: ſitq; K ipſius D æquemultiplex vt G L ipſius A F: itemq; M ipſius E vt N ipſius C: erit, per quartam hujus, ſicut K ad M, ita G L ad N. Sed K ad M proximè minor eſt ipſa M. Et G L igitur proximè minor eſt ipſa N.

Quod autem dicit, ex poſitionibus, hoc innuit: quòd quum G L ſit eodem modo multiplex ipſius A F, quo & K ipſius D: ſitq; D ad E ſicut L G ad A F: erit L G major C, quum K major quàm E poſita ſit.

Rursus Campanus. Conuerſam quoque hujus demonſtrare

ſtrare poterimus. Videlicet, ſi reperiantur aliqua æquemultiplicia primæ & tertiæ: itemq; alia ſecundæ & quartæ æquemultiplicia:& multiplex primæ ſuperet multiplex ſecundæ,neque multiplex tertiæ ſuperet multiplex quartæ : major erit proportio primæ ad ſecundam,quàm tertiæ ad quartam. Quod ſic demonſtratur:

Sint quatuor Quantitates, A prima, B ſecunda : C D tertia, & E quarta : ſintq; F ad A & G ad C D æquemultiplicia : ſimiliter H ad B & K ad E, æquemultiplicia : & F ſuperet H, neque G ſuperet K. Dico majorem eſſe rationem A ad B, quàm C D ad E.



Si enim fuerit æqualis : fiet vt G ſuperet K. per conuerſionem ſextæ Definitionis : quod eſt contra hypotheſin. Si autem minor: ponatur C L ad E ſicut A ad B. Eritque, per hujus decimam, C L minor C D. Et ſit minor in quantitate L D. Ponam igitur vt M N ſit ita multiplex C L, & N P ita multiplex L D, ſicut F eſt multiplex A. Eritq;, per primam hujus, M P ita multiplex C D, vt F eſt multiplex A. Vtraque igitur duarum Quantitatum M P & G, eſt æquemultiplex Quantitatis C D: quapropter ipſæ inter ſe æquales, per ea quæ demonſtrata ſunt in ſeptima hujus. Et quia G non eſt major K, non erit M P major eadem. Sed, per conuerſionem ſextæ Definitionis, M N eſt major K: quum F ſit major H. Major igitur M N, ipſa M P: Quod fieri non poteſt. Quare conſtat propoſitio. Hæc ille. Sed ne hæc quidem Demonſtratio quicquam habet egregium. Probat enim quod probatione non indiget, immò quod jam ſæpe in probationem aſſumpſimus ſuperiorum Theorematum. Prior tamen non contemnenda: quòd oſtendat rationem ſic conſtituendorum Æquemultiplicium, vt multiplex primæ ſuperet multiplex ſecundæ, ſed multiplex tertiæ non ſuperet multiplex quartæ.

THEOREMA 14, PROPOSITIO XIIII.

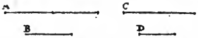
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἔλασσον ἔλασσον.

Si primæ ad ſecundam eadem fuerit ratio quæ ter-

tiæ

tiæ ad quartam, prima verò major fuerit, quàm tertia: erit & ſecunda major, quàm quarta: Et ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor.

Sit ratio A primæ, ad B ſecundam: vt C tertiæ, ad D quartam: & ſit major A, quàm C. Dico & B majorem eſſe quàm D: & ſi æqualis, æqualem: & ſi minor, minorem.



Quum enim A ſit major quàm C: erit, per priorem partem octauæ hujus, major ratio A ad D, quàm C ad D: ob idq; major A ad D, quàm A ad B. Quare, per ſecundam partem decimæ hujus, erit B major quàm D.

Si verò A ſit æqualis C: erit, per priorem partem ſeptimæ, A ad D ſicut C ad D. Quare, per ſecundam partem nonæ, erit B æqualis D.

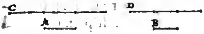
Quòd ſi A ſit minor quàm C, erit, per priorem partem octauæ, minor ratio A ad D, quàm C ad D: ob id, major A ad B, quàm A ad D. Quare, per ſecundam partem decimæ, erit B minor quàm D. Ac ſic patet Propoſitio.

THEOREMA 15, PROPOSITIO XV.

Τὰ μέρη, τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

Magnitudines inter ſe, eandem habent rationem quam earum Æquemultiplicia inter ſe.

Sint C ad A, & D ad B æquemultiplicia. Dico eandem eſſe rationem C ad D quæ eſt A ad B.



Diuidatur C ſecundùm quantitatem ipſius A: & D ſecundùm quantitatem ipſius B. Eruntq; tot partes in C, æquales ipſi A: quot in D, ipſi B. Et quia quælibet pars ipſius C, ad quamlibet partem ipſius D, eſt ſicut A ad B: erit, per duodecimam hujus, C ad D ſicut A ad B: Quod erat oſtendendum.

THEOREMA 16, PROPOSITIO XVI.

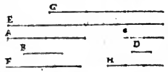
Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

 Si

Si quatuor Magnitudines proportionales fuerint, permutatim quoque proportionales erunt.

Sit proportio A ad B ſicut C ad D. Dico permutatim, eſſe A ad C ſicut B ad D.

Ponam E ad A, & F ad B æquemultiplices: itemq; G ad C, & H ad D æquemultiplices. Et erit, per antecedentem, E ad F ſicut G ad H. Itaque, per decimam quartam, ſi E eſt major G: erit & F major H: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Quare, per ſextam Definitionem hujus, erit A ad C ſicut B ad D: Quod erat oſtendendum.

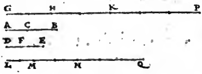


Ex hoc manifeſtum eſt, vt ex Continua proportionalitate fiat Permutata, oportere quatuor Magnitudines eſſe ejuſdem generis.

THEOREMA 17. PROPOSITIO XVII.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Si fuerint Magnitudines conjunctim proportionales, diſiunctim quoque proportionales erunt.



Sit proportio A B ad B C ſicut D E ad E F. Dico eſſe A C ad C B ſicut D F ad F E.

Ponam G H ad A C & H K ad C B: item L M ad D F & M N ad F E, ſingulas ſingularum æquemultiplices: Ac rurſus ipſarum C B & F E, alias vtcumque ęquemultiplices K P & N Q. Et erit, per primam hujus, G K ita multiplex A B vt G H eſt multiplex A C: & L N ita multiplex D E vt L M eſt multiplex D F. Sed quàm multiplex eſt G H ipſius A C, tam multiplex poſita eſt L M ipſius D F: & continuè, quàm multiplex L M ipſius D F, tam multiplex eſt, per primam hujus, L N ipſius D E. Quàm multiplex igitur G K ipſius A B, tam multiplex eſt, per vndecimam hujus, L N ipſius D E. Et quoniam H K & M N ſunt ipſarum C B & F E æquemultiplices: item K P & N Q, aliæ earundem æquemultiplices: erunt, per ſecundam hujus, K P & M Q, earundem C B & F E æque

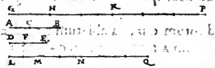
F E æquemultiplices. Per conuerſionem igitur ſextæ Definitionis, ſi G K multiplex A B, excedat H P multiplicem C B: excedet L N multiplex D E, ipſam M Q multiplicem F E: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Ablatis itaque communibus H K & M N, ſi G H excedit K P, excedet & L M, per animi Notionem, M Q: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Quare, per ſextam Definitionem, erit ſicut A C ad C B, ita D F ad F E: Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 18. PROPOSITIO XVIII.

Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

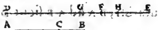
Si fuerint Magnitudines diſiunctim proportionales, conjunctim quoque proportionales erunt.

Manente eodem Magnitudinum poſitu, ſit A C ad C B ſicut D F ad F E. Dico eſſe A B ad B C ſicut D E ad E F. Conuerſa antecedentis.



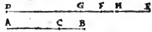
Singulis enim Æquemultiplicibus ad ſingulas Magnitudines accommodatis: erit, per conuerſionē ſextæ Definitionis, ſi G H excedit K P, vel M excedat N Q: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Quapropter, poſitis communibus H K & M N, erit, per communem Notionem, ſi G K excedit H P, vt L N excedat M Q: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Quare, per ſextam Definitionem, erit A B ad B C ſicut D E ad E F: Quod erat demonſtrandum.

ALITER, ſi placet, ab impoſſibili. Quum ſit A C ad C B ſicut D F ad F E: ſed non A B ad B C ſicut D E ad E F: ſit D E ad aliquam aliam, vt ad E G, Magnitudinem, ſicut eſt A B ad B C.



Atque ea erit major ipſa E F, aut minor: Nam ſi æqualis ponatur, erit conceſſa propoſitio. Sit itaque primum E G major quàm E F. Et erit, per antecedentem, A C ad C B ſicut D G ad E G. Itaque, per vndecimam hujus, erit D G ad E G ſicut D F ad F E. Quare, per decimamquartam ejuſdem, quum D G prima, ſit minor D F tertia: erit G E ſecunda, minor

E F quarta. Sed G E poſita fuit major. Quare euertitur poſitio.



Sit jam ſicut A B ad B C, ita D E ad E H, minorem quàm E F. Et erit, per antecedentem, A C ad C B ſicut D H ad H E. Itaque, per vndecimam, D H ad H E ſicut D F ad F E. Et quia D H prima, eſt major D F tertia: erit, per decimamquattam, E H ſecunda, major E F quarta: Quod fieri non poteſt. Quare, ſicut A B ad B C, ita D E ad E F: Quod erat demonſtrandum.

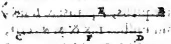
THEOREMA 19, PROPOSITIO XIX.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν· καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Si fuerit vt totum ad totum, ſic ablatum ad ablatum: erit & reliquum ad reliquum ſicut totum ad totum.

Quod quinta propoſuit de Multiplicibus, hæc de Magnitudinibus in vniuerſum.

Sit itaque vt totum A B ad totum C D, ita ablatum B E ad ablatum D F. Dico eſſe & reliquum A E ad reliquum C F, vt totum A B ad totum C D.



Quum enim ſit A B ad C D ſicut B E ad D F: erit permutatim, A B ad E B ſicut C D ad D F: & diſiunctim, A E ad E B ſicut C F ad F D: & iterum permutatim, A E ad C F ſicut E B ad F D. Et quia ſic erat A B ad C D, conſtat propoſitio.

APPENDIX ex Campano. Ex hac & Permutata proportionalitate demonſtratur Proportionalitas Euerſa. Vt ſi ſit A B ad B E ſicut C D ad D F: Dico eſſe B A ad A E ſicut D C ad C F.

Nam quum ſit A B ad B E ſicut C D ad D F: erit permutatim, A B ad C D ſicut B E ad D F. Ob id, per hanc decimamnonam, B A ad D C ſicut A E ad C F. Quare permutatim, B A ad A E ſicut D C ad C F: Quod erat oſtendendum.

CONVERSA quoque Proportionalitas poteſt demonſtrari indirectè, ex Permutata Proportionalitate & nona hujus.

Vt ſi ſit proportio A ad B ſicut C ad D. Dico eſſe B ad A ſicut D ad C.

Sin



Sin minus: Sit D ad E ſicut B ad A. Et quia A ad B eſt ſicut C ad D: erit permutatim A ad C ſicut B ad D. Et quia iterum B ad A ſicut D ad E: erit quoque permutatim, B ad D ſicut A ad E. Quare A ad E ſicut A ad C. Si igitur E non ſit æqualis C: fiet contra ſecundam partem nonæ. Si autem æqualis: erit B ad A ſicut D ad C: Quod fuit oſtendendum. Hæc Campanus. Hoc autem poſtremum probatum fuerat ſuprà ad quartam hujus.

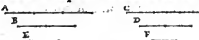
THEOREMA 20, PROPOSITIO XX.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Si fuerint tres Magnitudines vnius ordinis, & aliæ totidem alterius, fuerintq; duæ vnius in eadem ratione cum duabus alterius eodem ſitu poſitis, prima autem vnius fuerit major tertia: erit & prima alterius major tertia: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor.

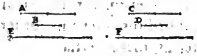
Hoc Theorema, cum ſequenti, proponitur ad Æquam proportionalitatem probandam.

Sint tres Magnitudines A, B, E, vnius ordinis: treſq; C, D, F, alterius: ſitq; A ad B ſicut C ad D: & B ad E ſicut D ad F.

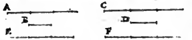


Dico, ſi A eſt major E, eſſe & C majorem F: & ſi æqualis, æqualem: & ſi minor, minorem.

Si enim eſt major: erit, per priorem partem octauæ hujus, major ratio A ad B, quàm E ad B: ob id, per duodecimam, major erit C ad D, quàm E ad B. Et quia, per Conuerſam proportionalitatem, E ad B eſt ſicut F ad D: erit C ad D major quàm F ad D. Quare, per priorem partem decimæ, major eſt C, quàm F. Quòd ſi A ſit minor quàm E: probabitur iiſdem argumentis C minor quàm F. Erit enim, per priorem partẽ octauæ, minor ratio A ad B, quàm



E ad B: ob idq́;, per duodecimam, & per Conuerſam proportionalitatem, minor erit C ad D, quàm F ad D. Quare, per priorem partem Decimæ, erit C minor F. Si autem A ſit æqualis E,



erit, per priorem partem ſeptimæ, A ad B ſicut E ad B: ob idq́;, per ſecundam partem vndecimæ, & Conuerſam proportionalitatem, erit C ad D ſicut F ad D. Quare, per priorem partem nonæ, erit C æqualis F: Quod erat demonſtrandum.

Hîc ſubijcit Campanus. Hanc Propoſitionem demonſtrauerunt quidam ex Permutata proportionalitate, ad hunc modum. Eſt A ad B ſicut C ad D: ergò permutatim A ad C ſicut B ad D. Et rurſùs quia B ad E ſicut D ad F: erit permutatim B ad C ſicut E ad F. Sed erat B ad D ſicut A ad C. Ergò, per vndecimam, erit A ad C ſicut E ad F. Quare, per decimam quartam, ſi A prima, eſt major E tertia: erit & C ſecunda, major F quarta: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Sed ſic non rectè demonſtrant. Nam ſi à Permutata proportionalitate argumentationem, vt cœperunt, perficiant: ij tandem Æquam proportionalitatem concludent: ſcilicet A ad C ſicut E ad F: ergò permutatim A ad E ſicut C ad F: Quæ eſt Æqua proportionalitas. Quòd ſi Euclides ſic concludi poſſe vidiſſet: fruſtrà hoc præmiſiſſet Theorema: ſed Æquam proportionalitatem ſtatim aſtruxiſſet. Quum itaque hæc ratiocinatio non procedat, niſi vtriusque ordinis Magnitudines ſint ejusdem generis: minus conuenienter ad ſingulare contrahunt quod Euclides generatim propoſuit.

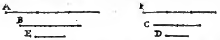
THEOREMA 21, PROPOSITIO XXI.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

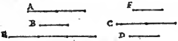
Si fuerint tres Magnitudines vnius ordinis, totidemq́; Magnitudines alterius, fueritq́; earum Perturbata ratio, prima verò vnius ordinis, fuerit major tertia: erit quoque prima alterius, major tertia.

Sint

Sint tres Magnitudines A,B,E, vnius ordinis: tresq; aliæ F,C,D, alterius: & ſit proportio inter eas Perturbata: ſcilicet A ad B ſicut C ad D, & B ad E ſicut F ad C. Dico ſi A eſt major E: eſſe & F majorem D: & ſi minor, minorem: & ſi æqualis, æqualem.



Hoc autem probatur iiſdem argumentis quibus ſuperior. Si enim A ſit major E, erit major ratio A ad B, quàm E ad B: atque ob id, major C ad D, quàm E ad B: quapropter & major quàm C ad F: quia vt E ad B, ſic C ad F, per Conuerſam proportionalitatem. Quare, per ſecundam partem decimæ, major eſt F quàm D.



Quòd ſi A minor ſit quàm E: erit, gradatim argumentando, minor C ad D, quàm ad F. Quare, per ſecundam partem ejuſdem, erit F minor D.



Si verò A ſit æqualis E, erit C ad D ſicut C ad F. Quare, per ſecundam partem nonæ, erit F æqualis D. Ac ſic conſtat Propoſitio.

Hæc itaque cum antecedente, quia ad probationem Æquæ proportionalitatis ſpectat, Æquemultiplicium rationem vtraque præcipuè conſiderat. Atque hunc ſenſum habent, vt non poſſit prima vnius ordinis major eſſe tertia, quin prima alterius ſit quoque major tertia: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Breuiter, hæc verba exceſſus & æqualitatis omninò ſic accipienda, vt in Definitione ſexta hujus. Atque hoc ad duarum ſequentium intelligentiam monere commodum fuit.

THEOREMA 22, PROPOSITIO XXII.

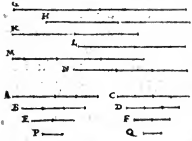
Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Si fuerint tres Magnitudines vnius ordinis, totidemq; alterius, fuerintq; binæ vnius ordinis in eadem ratione cum binis alterius ſimiliter ſumptis: eæ & ex æquali proportionales erunt.

Sint tres Magnitudines A,B,E, vnius ordinis: aliæq; totidem alte

alterius, C, D, F: ſitq; A ad B ſicut C ad D, & B ad E ſicut D ad F. Dico eſſe A ad E ſicut C ad F.

Ponam G ad A, & H ad C æquemultiplicia: itemq; K ad B, & L ad D, alia æquemultiplicia. Rurſus M ad E, & N ad F, alia æquemultiplicia. Et erit, per quartam, aut, ſi mauis, per decimãquartam hujus, G ad K ſicut H ad L: & K ad M ſicut L ad N. Itaque, per vigeſimam ejuſdẽ, ſi G eſt major M, erit H major N: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Quare, per ſextam Definitionem hujus, erit A ad E ſicut C ad F: Quod fuit oſtendendum.



IAM verò, ſi fuerint Magnitudines plures tribus in vtroque ordine: erit omninò prima ad vltimam vnius, vt prima ad vltimam alterius: ſcilicet in Æqua proportionalitate. Vt, ſi addantur P & Q: & ſit E ad P ſicut F ad Q: Dico eſſe A ad P ſicut C ad Q. Erit enim A ad E ſicut C ad F, vt modò demonſtrauimus. Sepoſitis igitur B & D, erunt tres Magnitudines, A, E, P, vnius ordinis treſq; alterius C, F, Q, ejuſdem conditionis cum prioribus. Quare A ad P ſicut C ad Q: Quod erat oſtendendum.

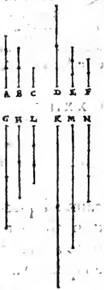
THEOREMA 23, PROPOSITIO XXIII.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Si fuerint tres Magnitudines vnius ordinis, totidemq; alterius, fueritq; perturbata inter ipſas ratio: eæ & ex æquali proportionales erunt.

Sint tres Magnitudines vnius ordinis A, B, C: atque aliæ totidem alterius D, E, F. Sitq; A ad B ſicut E ad F: & B ad C ſicut D ad E. Dico eſſe A ad C ſicut D ad F.

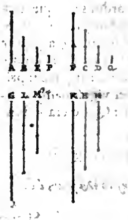
Ponam G, H, K, ad A, B, D, æquemultiplicia: aliaq; L, M, N, ad C, E, F, æquemultiplicia. Et erit, per decimamquintam hujus, vt A ad B, ſic G ad H. Et quoniam vt A ad B, ſic E ad F: erit, per



per vndecimam, vt G ad H, ſic E ad F. Quumq; ſit vt E ad F, ſic M ad N, per ipſam decimamquintam: erit &, per vndecimam, vt G ad H, ſic M ad N. Et quoniam vt B ad C, ſic D ad E: erit, per quartam hujuſce, vt H ad L, ſic K ad M. Sunt itaque G, H, L tres Magnitudines, & K, M, N, aliæ totidem, perturbatim proportionales. Si igitur G excedit L, & K excedet N: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Quare, per ſextam Definitionem, erit vt A ad B, ſic D ad F: Quod erat oſtendendum.

ALITER poſſunt ſumi æquemultiplicia. Sint enim tres Magnitudines vnius ordinis A, B, E, totidemq; F, C, D, alterius: & ſit vt A ad B, ſic C ad D: & vt B ad E, ſic F ad C. Dico eſſe A ad E ſicut F ad D.

Sumam G, H, K, ad A, C, F, æquemultiplicia: aliaq; L, M, N ad B, E, D, æquemultiplicia. Et erit, per quartam hujus, G ad L ſicut H ad N: &, per decimamquintam, L ad M ſicut K ad H. Erunt itaque, vt prius, Æquemultiplicia vtriusque ordinis, in ratione perturbata inter ſe. Ob id, per vigeſimamprimam, ſi G excedat M, & K excedet N: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Quare, per ſextam Definitionem, erit vt A ad E, ſic F ad D: Quod erat probandum.



Quod ſi plures tribus fuerint Magnitudines in vtroque ordine: verbi cauſa, quatuor: ſitq; A ad B ſicut D ad Q: & B ad E ſicut C ad D: & E ad P ſicut F ad C: erit & in æqua proportionalitate, A ad P ſicut F ad Q. Nam quum probatum ſit A ad E ſicut C ad Q: ſublatis B & D, erunt tres quantitates, A, E, P, aliæq; totidem F, C, Q, in Perturbata ratione inter ſe. Quare A ad P ſicut F ad Q: Quod erat demonſtrandum.

Ac quemadmodum ex Ternarij demonſtratione probatur Quaternarius,

ſepoſito vno mediorum: ita ex Quaternario Quinarius, duobus ſepoſitis mediis: & ex Quinario Senarius, tribus ſemotis mediis. Ac ſic continenter. Quod & in ſuperiori ſpecie Æquæ proportionalitatis intelligendum. Quamobrem, quum Ternarius totam probationem abſoluat, diſertè Euclides de tribus tantùm Magnitudinibus propoſuit.

THEOREMA 24, PROPOSITIO XXIIII.

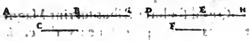
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Si fuerit primum ad ſecundum, vt tertium ad quartum: & item quintum ad ſecundũ, vt ſextum ad quartum: erit & compoſitum ex primo & quinto ad ſecundum, vt compoſitum ex tertio & ſexto ad quartum.

Quod ſecunda propoſuit de Multiplicibus, hæc generatim de Magnitudinibus proponit.

Sit itaque A B ad C vt D E ad F: itemq; B G ad C vt E H ad F. Dico eſſe A G ad C ſicut D H ad F.

Erit enim, per Conuerſam proportionalitatem, C ad B G vt F ad E H: quapropter, ex vigeſimaſecunda, erit in Æqua ratione A B ad B G vt E D ad E H: ſumptis ſcilicet A B prima, C ſecunda, & B G tertia, vnius ordinis: atque D E prima, F ſecunda, & E H tertia alterius. Igitur, per decimamoctauam, A G ad G B vt D H ad H E. Quare, quum ſit poſita B G ad C vt E H ad F: ſumptis A G prima, B G ſecunda, & C tertia, vnius ordinis: atque D H prima, E H ſecunda, & F tertia, alterius: erit, per vigeſimamſecundam, in Æqua ratione, A G ad C vt D H ad F: Quod erat oſtendendum.



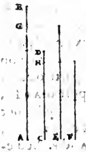
THEOREMA 25, PROPOSITIO XXV.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον, δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

Si qua

Si quatuor Magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus majores erunt.

Sint quatuor Magnitudines proportionales: A B, C D, E, & F: vt A B ad C D, ſic E ad F: ſitq; earum maxima A B, minima verò F. Dico ambas A B & F, majores eſſe ambabus C D & E.



Ponam A G æqualem ipſi E: & C H æqualem ipſi F. Et quoniam ſicut tota A B ad totam C D, ſic ablata A G ad ablatam C H, erit & reliqua G B, per decimamnonam hujus, ad reliquam H D, ſicut tota A B ad totam C D. Major autem eſt A B ipſa C D: Et major igitur G B ipſa H D. Et quoniam æqualis eſt A G ipſi E, & C H ipſi F: erunt A G & F æquales ipſis C H & E. Addita ergo G B majori ad duas A G & F: & H D minori ad duas C H & E: fient, per communem ſententiam, A B & F, majores quàm C D & E: Quod erat demonſtrandum.

HACTENVS Euclides hujus Quinti Proportiones tradidit. Nouem autem ſequentes propoſitiones à Campano additæ ſunt, ex alieno quopiam exemplari. ſicut & ſæpè aliâs ordinem Euclidis deſerit, pauca prætermittit, nonnulla ſubſtituit, aliaq; addit de ſuo. Neque infelici opera. Pleraque enim in demonſtrando facit meliora & clariora, compendij officio: licet in quibuſdam dormitet. Vt vt eſt, Campani conſtructionem retinuit in citando Euclide, Ioannes Regiomontanus noſtræ ætatis Mathematicus clariſſimus. Quin & ſequentes Propoſitiones ab eo citatas inuenimus, in ea quam in Ptolemæum reliquit Epitome. Quæ res effecit vt illas apponeremus: alioqui libenter prætermiſſuri. Nam præter id quod probationes quas ex iis venatur Regiomontanus, abundè ex Euclide conſtant: etiam in hac Proportionum materia mihi videntur Propoſitiones reſecandæ potiùs quàm in longiùs ducendæ. Nam quæ per ſe claræ ſunt, locum tantùm occupant: ingenium etiam onerant. Tædium enim multitudo vbique parit. Eæ itaque ſic habent:

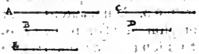
Prima Additarum.

Si fuerit quatuor Quantitatum proportio primæ

ad ſecundam, major quàm tertiæ ad quartam: erit conuerſim è contrario, ſecundæ ad primam, minor quàm quartæ ad tertiam.

Sit proportio A ad B major quàm C ad D. Dico conuerſim e contrariò, minorem eſſe proportionem B ad A, quàm D ad C.

Si enim eſt eadem B ad A, quæ eſt D ad C: erit econuerſò A ad B vt C ad D, contra hypotheſin. Si verò major eſt B ad A, quàm D ad C; ponatur E ad A vt D ad C. Eritq́; , per duodecimam, E ad A minor quàm B ad A. Quapropter, ex priori parte



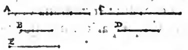
decimæ, erit E minor B: ob idq́;, ex ſecunda parte octauę, major erit proportio A ad E, quàm A ad B. Et quia, per Conuerſam proportionalitatem, eſt A ad E ſicut C ad D: erit, per duodecimam, proportio C ad D major quàm A ad B. Sed erat minor. Ex repugnantia igitur, aſtruitur propoſitio.

Poſſumus & affirmatè demonſtrare. Ponatur E ad B vt C ad D. Et erit econuerſò B ad E vt D ad C. Et quia major eſt A quàm E, per priorem partem decimæ: erit, ex ſecunda parte octauæ, B ad A minor quàm B ad E. Quare, per duodecimam, B ad A minor quàm D ad C; Quod erat probandum.

11.

Si quatuor Quantitatum fuerit major proportio primæ ad ſecundam, quàm tertiæ ad quartam: erit permutatim, major proportio primæ ad tertiam, quàm ſecundæ ad quartam.

Sit major proportio A ad B, quàm C ad D. Dico permutatim, majorem eſſe A ad C, quàm B ad D.



Eadem enim non erit: quia tunc quoq; eſſet permutatim, A ad B ſicut C ad D. Quòd ſi ſit minor: ponatur E ad C vt B ad D. Eritq́;, ex duodecima, E ad C major quàm A ad C. Itaque, ex priori parte decimæ, erit E major quàm A. Quapropter, ex

priori

priori parte octauæ, E ad B major quàm A ad B. Et quia poſita eſt E ad C ſicut B ad D: erit permutatim, E ad B ſicut C ad D. Quare, ex duodecima, major erit proportio C ad D, quàm A ad B: Quod eſt contra hypotheſin.

IDEM per affirmationem. Sumatur E ad B vt C ad D. Eritq́;, ex priori parte decimæ, E minor A: proptereà quòd, ex priori parte octauæ, major eſt A ad C, quàm E ad C. Sed ex Permutata proportionalitate, eſt E ad C vt B ad D. Quare, per duodecimam, A ad C major quàm B ad D: Quod erat oſtendendum.

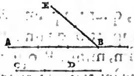
III.

Si fuerint quatuor Quantitates, quarum primæ ad ſecundam ſit major proportio, quàm tertiæ ad quartam: erit quoque conjunctim, major proportio primæ & ſecundæ ad ſecundam, quàm tertiæ & quartæ ad quartam.

Sit major proportio A ad B, quàm C ad D. Dico & majorem eſſe proportionem totius A B ad B, quàm totius C D ad D.

Neque enim erit eadem: quia ſic quoque diſiunctim eſſet A ad B vt C ad D.

Quòd ſi ſit minor: ſit E B ad B vt C D ad D. Eritq́;, ex duodecima hujus, E B ad B major quàm A B ad B. Itaque, ex priori parte decimæ, major eſt ipſa E B quàm tota A B. Et, per communem Notionem, E major quàm A. Quapropter, ex priori parte octauæ, major eſt proportio E ad B, quàm A ad B. Sed E ad B eſt vt C ad D, per Diſiunctam proportionalitatem: erat enim E B ad B vt C D ad D. Quare, per duodecimam, C ad D major eſt, quàm A ad B: Quod eſt contra hypotheſin.



IDEM affirmatè. Quum poſita ſit major proportio A ad B, quàm C ad D: ponatur E ad B vt C ad D. Eritq́;, ex priori parte decimæ, E minor A. Ob id, per animi Notionem, E B erit minor quàm A B. Itaque, ex priori parte octauæ, major erit proportio A B ad A, quàm E B ad B. At proportio E B ad B, per Conjunctam proportionalitatem, eſt ſicut C D ad D. Poſita enim eſt E ad B vt C ad D. Quare, per duodecimam, major eſt A B ad

B, quàm C D ad D: Quod erat oſtendendum.

IIII.

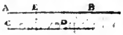
Si fuerint quatuor Quantitates, quarum primæ & ſecundæ ad ſecundam ſit major proportio, quàm tertiæ & quartæ ad quartam: erit quoq; diſiunctim proportio primæ ad ſecundam major quàm tertiæ ad quartam.

Sit proportio A B ad B major quàm C D ad D. Dico & diſiunctim, A ad B majorem eſſe, quàm C ad D.

Æqualis quippe non erit. Nam, per Conjunctam proportionalitatem, eſſet A B ad B vt C D ad D. Si verò minor eſſe poſſit, vt ſit major C ad D, quàm A ad B: erit, per antecedentem, major C D ad D, quàm A B ad B. Quod minimè conuenit: quum poſita ſit minor.



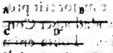
IDEM affirmatè. Ponatur E B ad B vt C D ad D. Eritq;, ex priori parte decimæ, E B minor quàm A B: ob id, per animi Notionem, E eſt minor quàm A. Quare, ex priori parte octauæ, proportio E ad B minor eſt quàm A ad B: Quod erat oſtendendum.



V.

Si fuerint quatuor Quantitates, quarum primæ & ſecundæ ad ſecundam major ſit proportio, quàm tertiæ & quartæ ad quartam: erit euerſim, minor Proportio primæ & ſecundæ ad primam, quàm tertię & quartæ ad tertiam.

Sit major proportio A B ad B, quàm C D ad D. Dico euerſo modo, minorem eſſe A B ad A, quàm C D ad C.



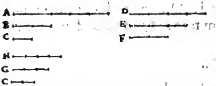
Erit enim diſiunctim, per antecedentem, major proportio A ad B, quàm C ad D. Igitur, per primam harum, conuerſò, minor B ad A, quàm D ad C. Quare, per tertiam earundem, conjunctim, minor

nor erit A B ad A, quàm C D ad C: Quod erat demonſtrandum.

VI.

Si fuerint tres Quãtitates vnius ordinis, totidemq́; alterius: fueritq́; primæ priorum ad ſecundam, major proportio, quàm primæ poſteriorum ad ſecundam: erit quoque primæ priorum ad tertiam, major proportio, quàm primæ poſteriorum ad tertiam.

Sint tres Quantitates vnius ordinis A, B, C: aliæq́; totidem alterius, D, E, F. Et ſit major proportio A ad B, quàm D ad E; Itemq́; major B ad C, quàm E ad F. Dico majorem eſſe A ad C, quàm D ad F.



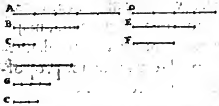
Sit enim G ad C vt E ad F. Eritq́;, ex priori parte decimæ hujus, G minor B. Ob id, ex ſecunda parte octauæ, major eſt ratio A ad G, quàm A ad B. Multò major igitur eſt A ad G, quàm D ad E. Sit itaque H ad G vt D ad E. Eritq́;, ex priori parte decimæ, A major quàm H. Ob idq́;, ex priori parte octauæ, major ratio A ad C, quàm H ad C. Atqui H ad C, per Æquam proportionalitatem, eſt vt D ad F: eſt enim H ad G vt D ad E: & G ad C vt E ad F. Quare, per duodecimam, A ad C major eſt, quàm D ad F: Quod erat demonſtrandum.

VII.

Si fuerint tres Quantitates vnius ordinis, totidémque alterius, fueritq́; proportio ſecundæ priorum ad tertiam major quàm primæ poſteriorum ad ſecũdam, itemq́; primæ priorum ad ſecundam, major quàm ſecundæ poſteriorum ad tertiam: erit & major proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ poſteriorum ad tertiam.

Sint tres Quantitates vnius ordinis, A, B, C: & aliæ totidem D, E, F,

D, E, F, alterius: ſitq; major proportio B ad C, quàm D ad E: & major A ad B, quàm E ad F. Dico majorem eſſe A ad C, quàm D ad F. Hæc ad Æquam proportionalitatem pertinet.



Sit enim G ad C vt D ad E. Et erit, per priorē partē decimæ hujus, G minor B: ob id, per ſecundam partem octauæ, major proportio A ad G, quàm ad B. Quapropter multo major A ad G, quàm E ad F. Sit itaque H ad G vt E ad F. Eritq;, ex priori parte decimæ, A major H: ob idq;, proportio A ad C major quàm H ad C, per priorem partem octauæ. Atqui, per vigeſimamtertiam, proportio H ad C eſt vt D ad F: quum ſit G ad C vt D ad F, & H ad G vt E ad F. Quare, per duodecimam, major eſt proportio A ad C, quàm D ad F: Quod erat demonſtrandum.

VIII.

Si fuerit proportio totius ad totum, major quàm ablati ad ablatum: erit & reliqui ad reliquum, major proportio, quàm totius ad totum.

Sint duæ Quantitates, A B & C D: à quibus abſcindantur A E & C F, ſintq; reliqua E B & F D: & ſit major proportio A B ad C D, quàm A E ad C F. Dico & majorem eſſe proportionem E B ad F D, quàm A B ad C D. Erit enim, per ſecundam additarum permutatim, major proportio A B ad A E, quàm C D ad C F. Ob idq;, ex quinta earundem, erit euerſim, minor proportio A B ad E B, quàm C D ad C F. Quare rurſus permutatim, minor proportio A B ad C D, quàm E B ad F D: Quod erat demonſtrandum.



IX.

Si fuerint tres Quantitates vnius ordinis, ac totidem alterius, fueritq; cujuſlibet antecedentis ad comparem, major proportio, quàm cujuſquam ſubſequē-

tis

tis ad ſuam: erit & harum omnium ad omnes illas major proportio, quàm alicujus ſubſequentium ad ſuam comparem, aut etiam quàm omnium ad omnes: minor autem, quàm prima ad primam.

Sint tres Magnitudines vnius ordinis, A, B, C: ac totidem alterius, D, E, F: ſitq; major proportio A ad D, quàm B ad E: & B ad F, quàm C ad F. Dico proportionem A B C ſimul ſumptarum, ad D E F ſimul ſumptas, majorem quàm B ad E, & quàm C ad F: majorem etiam quàm B & C ſimul ſumptarum ad E & F ſimul ſumptas: minorem autem, quàm A ad D.

Quum enim ſit A ad D major quàm B ad E: erit permutatim, A ad B major quàm D ad E: & conjunctim, A B ad B, major quàm D E ad E. Et iterum permutatim, A B ad D E major quàm B ad E.



Quare, per antecedentem, A ad D major quàm A B ad D E. Atq; eodem modo probabitur major ratio B ad E, quàm B C ad E F. Major itaque eſt A ad D, quàm B C ad E F. Quare, permutatim, major eſt A ad B C, quàm D ad E F. Et conjunctim, major A B C ad B C, quàm D E F ad E F: Et iterum permutatim, major A B C ad D E F, quàm C B ad E F: Quare, per antecedentem, major eſt A ad D, quàm A B D ad D E F: Quod erat demonſtrandum.

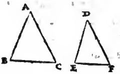
Libri quinti Geometricorum Elementorum finis.

IACOBI PELETARII CENOM. IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA Demonſtrationum Liber ſextus.

DEFINITIONES.

Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

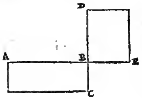
Similes Figuræ dicuntur, quæ angulos æquales habent ad vnum, & latera, quæ angulos æquales continent, proportionalia.



Vt ſi fuerint duorum Triangulorum A B C & D E F, anguli mutuò æquales: nempè angulus A angulo D, & angulus B angulo E: fueritq; latus A B ad latus D E, vt A C ad D F & B C ad E F: erunt hæc duo Triangula ſimilia.

Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.

2 Reciprocæ Figuræ dicuntur, quum vtriuſque ipſarum mutua latera fuerint proportionalia.



Vt ſi fuerint duæ Figuræ, verbi gratia, Quadrilateræ, A B C & D B E: fueritq, latus A B ad latus B D, ſicut latus B E ad latus B C: hæ duæ dicuntur Reciprocæ. Sic enim ſtat proportionalitas, vt duo latera vnius ſint

ſint antecedentia, & duo alterius ſint conſequentia. Atque eam ob cauſam, à nonnullis ſatis appoſitè vocantur Figuræ mutuorum laterum.

Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον.

3 Per mediam & extremam rationem diuidi recta linea dicitur, quum ſic fuerit tota ad majus ſegmentum, vt majus ſegmentum ad minus.

Id eſt, quod vulgò dicitur, lineam diuidi ſecundùm proportionem habentem medium & duo extrema. Vt ſi fuerit linea



A B ſic diuiſa in puncto C, vt ſit tota A B ad ſegmentum A C vt idem A C ad C B.

Hanc diuiſionem docuit vndecima Secundi, ſed nulla proportionum mentione: quod nominatim docebit trigeſima hujus.

Ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

4 Altitudo Figuræ, eſt linea à vertice ad baſin perpendiculariter deducta.

Trianguli A B C altitudo, eſt perpendicularis A D. Rectum enim, vt anteà monuimus, omnia metitur. Vbi duarum linearum æquidiſtantia intelligitur: ſcilicet linea duci per punctum



A, quæ ſit baſi B C parallelus. Quòd ſi baſis poneretur A B, huic duceretur parallelus per punctum C: ſicut & ipſi A C (ſi fungeretur vice baſis) per punctum B. Atque ab eo puncto vbi vertex eſſet, demitteretur perpendicularis, quę altitudinem monſtraret.

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα λόγον.

5 Ratio ex duabus rationibus aut ex pluribus con-

ſtare dicitur, quum rationes Quantitatum inter ſe multiplicatæ, aliquam rationem efficiunt.

Rationes Quantitatum hoc loco dicuntur denominationes ipſarum proportionum. Ob id, vocem quantitatis generaliorem quàm Magnitudinis vſurpauit, vt ſignificaret hunc locum ſine Numerorum conſideratione præteriri non poſſe.

Si itaq; fuerint tres Quantitates A B, C D, & E F, quarum C D media: conſtabit ratio primæ A B ad vltimam E F, ex ductu rationis quã habet A B ad C D in rationem quam habet C D ad E F.

Hoc igitur totum ex eo ſumptum eſt, quòd Medij officium ſit extrema conjungere & colligare. Quod nos Numerorum auxilio declarabimus.



Ponatur enim ratio A B primæ ad C D mediam, ſeſquiplex ſeu ſeſquialtera: ſed C D mediæ ad E F extremam, dupla. Scilicet, quum A B ad C D ſit ſeſquialtera: qualium partium eſt A B trium, talium C D ſit duarum: Quumq; C D ſit ad E F dupla: qualium duarum eſt C D, talis ſit E F vnius. Habes itaque duos Denominatores Proportionũ, nempè $\frac{3}{2}$ & $\frac{2}{1}$: quos ſi inter ſe multiplicaueris, conflabitur Denominatio primæ A B ad vltimam E F: ſcilicet Tripla.

Iam, ſi plura ſint Media, eadem etiam ex iis conſtabit ratio, ac ſi vnicum eſſet. Vt ſi inter A B & E F, earundem, quas poſuimus, partium, ſtatuatur alterum Medium G H: manebit etiamnum ratio A B ad E F compoſita ex tribus rationibus, quæ ex duabus modò componebatur, quantacumque ſit G H.



Sit enim, vt priùs, A B ad C D ratio ſeſquialtera: C D verò ad G H, ſubdupla: erit G H ad E F, quadrupla. Ducantur jam tres Denominatores inter ſe: ſcilicet $\frac{3}{2}$ in $\frac{1}{2}$, fit $\frac{3}{4}$: Et $\frac{3}{4}$ in $\frac{4}{1}$, fit $\frac{12}{4}$, id eſt Tripla denominatio. Quare, vt priùs, A B ad E F tripla ratio, ſed ex tribus rationibus compoſita. Quot igitur erunt termini, vt vocant, in tot partes diuidetur ratio primæ Quantitatis ad vltimam, dempta vnitate: ſeu mauis, quot medij erunt termini, in tot partes diuidetur ratio, ac præterea in vnam. Atque, vt vno verbo dicam, inter duas Quantitates, alias medias Quantitates collocare:

nil

nil aliud eſt, quàm proportionẽ ambarum in partes arbitrarias diuidere. Atque hoc ſatis eſſe putamus ad præſens inſtitutum. Hæc enim qui ampliora cupiet, ex Arithmeticis petat. Proportionum verò materiam in Tertio noſtræ Arithmeticæ Libro abundè tractauimus.

SCIO non defuturos qui non probent, quòd Quantitatum rationes dixerim: non, vt Euclides reliquit, Rationum quantitates. Quibus ego breuiter reſpondeo, me id vt doctrinæ conſulerem feciſſe. Nam ſi, exempli cauſa, quantitatem 4 ad quantitatem 2, duplam habere rationem dixero, ſcienter & ſignificanter dixero. Si verò rationi duplæ quantitatem eſſe: obſcurè & implicatè. Nam quum Quantitati ratio inſit; rurſùs Rationi quantitatem ineſſe, circuitionem importat, quæ in diſciplinis maximè fugienda eſt. Ratio igitur nobis ea eſt, quæ denominationem præ ſe fert: vt dupla, tripla, & quæ ſunt ejuſmodi. Atque hæ inter ſe multiplicantur; ſcilicet dupla ratio in triplam, quæ ſextuplam parit: ac cæteræ ſuo modo. Neque hîc Quantitas in Quantitatem ducitur, vt linea in lineam. Sic enim fieret Parallelogrammum: quod huic loco eſt alienum. At nihil multiplicatur niſi quod quantum eſt. Certè. Et fateor quidem Rationes quantas eſſe. Sed circuitum illum vitare volui. Vnicuiq; tamen vt quãtitates Rationũ dicat, per me licet. Hîc enim agitur non dicendi, ſed docendi ratio.

ID etiam obiter monebimus, hanc Rationum compoſitionem, non eſſe Proportionum Additionem, vt quidam putarunt. Aliud quippè eſt, Rationes alias ex aliis componere, & aliud, Rationes rationibus adjungere. Quod & in Arithmeticis docuimus. Nos ad Propoſitiones ingrediamur.

THEOREMA PRIMVM,

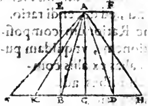
PROPOSITIO PRIMA.

TA τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Triangula ejuſdem altitudinis, itidem & Parallelogramma, inter ſe ſunt vt baſes.

Sint duo Triangula A B C & A C D, ejuſdem altitudinis. Dico, vt eſt B C baſis ad C D baſin, ſic eſſe A B C Triangulum ad A C D Triangulum. Sint etiam Parallelogramma C E & C F, ejuſdem altitudinis. Dico itidem vt B C baſis ad C D baſin, ſic C E Parallelogrammum ad F C Parallelogrammum.

Producam B D vtrimque in G, H puncta: Et ponam duas B K & K G ipſi C B æquales: & D H ipſi C D. Tum connectam A G, A K, & A H. Eruntq; Triangula A B C, A K B, & A G K inter ſe æqualia, per trigeſimamoctauam Primi: itidem & Triangula A C D & A D H, per eandem, inter ſe æqualia. Ac proinde Triangulum



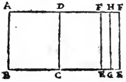
A G C, tam multiplex Trianguli A B C, quàm baſis G C multiplex ipſius baſis B C. Itemq; Triangulum A C H, Trianguli A C D tam multiplex, quàm baſis C H ipſius baſis C D. Et, per eandem Primi, ſi G C baſis æqualis eſt C H baſi: erit & Triangulum A G C æquale Triangulo A C H: & ſi majus, majus: & ſi minus, minus. Eſt igitur, per ſextam Definitionem Quinti, ſicut B C baſis ad C D baſin, ita A B C Triangulum ad A C D Triangulum: Quod eſt prius.

Quumq; Parallelogrammum E C duplum ſit Trianguli A B C, per quadrageſimamprimam Primi: & Parallelogrammum F C, duplum Trianguli A C D, per eandem: erit, per decimamquintam Quinti, vt Triangulum A B C ad Triangulum A C D, ſic Parallelogrammum E C ad Parallelogrammum F C. Quod fuit demonſtrandum.

Hoc

Hoc autem in communi judicio totum poſitum eſt. Quod ſic probabimus, vt Demonſtrationis vice eſſe poſſit: ſimul oſtendemus quânam ratione inducatur Trigeſimaoctaua Primi ad probationem exceſſus & imminutionis Æquemultiplicium, quum ipſa de æqualitate tantùm propoſuerit.

Sit Parallelogrammum A B C D, ejuſdem altitudinis vt Parallelogrammum D C E F. Dico vt eſt B C baſis ad C F baſin, ſic eſſe A B C D, Parallelogrammum ad D C E F, Parallelogrammum.



Primùm enim, ſi æquales ſint baſes, non eſt dubium quin eadem ſit ratio baſium & Parallelogrammorum: quum ſint & Parallelogramma æqualia, per ipſam Trigeſimamoctauam Primi. Si verò inæquales fuerint: neque Parallelogramma æqualia eſſe poſſunt, per eandem. Sit ergo B C major C E, quam excedat quantitate E G: vt ſcilicet C G ſit æqualis ipſi B C. Et ducatur parallelus G H, perficiaturq; Parallelogrammum D C G H. Et erit, ex ipſa jam inducta Propoſitione, Parallelogrammum A B C D æquale Parallelogrammo D C G H. Quapropter, ex communi Notione, ſicut D C G H majus eſt D C E F, ita A B C D majus eſt eodem D C E F. Ac propterea, quum B C major ſit C E, erit ſimul A B C D majus D C E F. Simili argumentatione probabitur, ſi B C minor ſit C E, ſimul A B C D majus eſſe ipſo D C E F. Vnde colligitur vt B C baſis ad C E baſin, ita A B C D Parallelogrammum ad D C E F Parallelogrammum. Nihil enim refert vtrum dicas, non poſſe eſſe primum majus ſecundo, quin tertium ſit majus quarto; neque æquale, quin æquale: neq; minus quin minus: an verò dicas, vt primum ad ſecundum, ita tertium ad quartum: licet illud nominatim ab Euclide poſitum ſit, Æquemultiplicium gratiâ, vt notum eſt ex Quinto. Atque hoc dictum volui, vt vbiq; admonerem, Æqualitatem eſſe omnium Proportionum originem & ducem.

THEOREMA 2, PROPOSITIO II.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς. καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, παρὰ τὴν λοι-

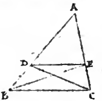
πὴν

πλευρὰν ἔσται τοῦ τριγώνου παρὰ λοιπὴν παράλληλος.

Si Trianguli duo latera recta linea ſic ſecet, vt ipſa ad reliquum ſit parallelus: duo latera proportionaliter ſecabit: & ſi proportionaliter duo latera ſecet, erit ipſa ad reliquum parallelus.

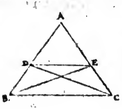
Sit Triangulum A B C, cujus duo latera A B & A C ſic ſecet recta D E, vt ipſa ſit lateri B C parallelus. Dico priùs vt eſt B D ad D A, ſic eſſe C E ad E A.

Connectantur B E & C D. Eritq;, per trigeſimamſeptimã Primi, Triangulum B E D æquale Triangulo C E D: Sunt enim inter Parallelos D E & B C, & eandem habent baſin E D. Vtrumq; igitur ad Triangulum A E D eandem habet rationem, per ſeptimam Quinti. Erit itaque vt B E D ad A E D, ita B D ad D A, per antecedentem: quum eundem habeant verticem E: ſimiliter, per eandem, ſicut C E D ad A E D, ita C E ad E A: eundem enim habent verticem D. Quare, per vndecimam Quinti, B D ad D A, ſicut C E ad E A: Quod eſt prius.



Iam ſit B D ad D A vt C E ad E A. Dico D E eſſe ipſi B C parallelum. Erit enim, per antecedẽtem & per vndecimam Quinti, Trianguli A E D ad vtrumque B E D & C E D, proportio vna. Itaque, per ſecundam partem nonæ Quinti, duo B E D & C E D Triangula æqualia. Quare, quum eandem habeant baſin D E, & ex eadem parte: erunt, per Trigeſimamnonam Primi, inter duas Parallelos: Quod erat demonſtrandum.

HVIVS etiam Theorematis rationem ab Æquali ductam eſſe ſatis manifeſtum eſt. Sit enim Triangulum A B C duorum laterum A B & A C æqualium, quæ ſecentur à linea recta D E, quæ ipſi B C ſit Parallelus. Et conſtat, ex vigeſimanona Primi, quatuor angulos B, C, D, & E, eſſe æquales: vnde, per quintam ejuſdem, duo A D & A E latera, Trianguli A E D, æqualia. Ex communi igitur Notione, D B ipſi E C æqualis. Quare A D ad D B vt A E ad E C: Quod eſt prius.



Iam

Iam connectantur B E & C D. Et quoniam ponitur A D ad D B vt A E ad E C: erit, per antecedentem, & per vndecimam Quinti, Trianguli A D E ad vtrumque B D E & C E D proportio vna. Vtrumque igitur æquale, per alteram partem nonæ Quinti. Quare, per trigeſimamnonam Primi, ipſa inter duas Parallelos conſiſtunt: Quod erat oſtendendum.

Vides Parallelorum officio conſeruari jus Æqualitatis: vt in ſuperiori, immò vt in Demonſtrationibus Geometricis paſſim apparet.

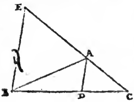
THEOREMA 3, PROPOSITIO III.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς. καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα, τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

Si recta linea angulum Trianguli bifariam ſecans, ſecuerit & baſin: erunt duo ſegmenta inter ſe, ſicut duo reliqua Trianguli latera: Et ſi ſegmenta fuerint vt duo reliqua Trianguli latera: linea baſin ſecans, & angulum oppoſitum bifariam ſecabit.

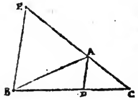
Sit Triangulum A B C, cujus angulum A diuidat linea A D bifariam. Dico B D ad D C eſſe vt A B ad A C. Et ſi B D ad D C vt A B ad A C: angulum bifariam eſſe diuiſum.

Ducam B E æquidiſtantem D A: Et protraham C A donec concurrat cum B E ad punctum E. Et erit, per priorem partem vigeſimænonæ Primi angulus E B A æqualis angulo B A D. Et, per alteram partem ejuſdem, angulus E æqualis angulo D A C. Quapropter, ex animi Notione, angulus E æqualis angulo A B E.



Itaque, per ſextam Primi, A B & A E æquales. Ob idq;, per priorem partem ſeptimæ Quinti, erit E A ad A C vt A B ad A C. At, per antecedentem, E A ad A C vt B D ad D C. Quapropter A B ad A C vt B D ad D C: Quod eſt prius.

Sit jam, manente eadem conſtru-



ctione, A B ad A C vt B D ad D C. Et quia, per antecedentem, E A ad A C eſt vt B D ad D C: erit E A ad A C, vt A B ad A C. Itaque, per priorem partē nonæ Quinti, B A & A B ſunt æquales. Quapropter, per quintam Primi, duo anguli E & E B A æquales. Quare, per vigeſimamnonam Primi & animi Notionem, angulus B A D æqualis eſt angulo C A D: Quod fuit probandum.

E S T autem hæc conſtructio dimidia pars illius Figuræ Gnomonicæ quam in Quadrageſimatertia Primi ad omnes Demonſtrationes Geometricas locupletiſſimam eſſe diximus: quæq; omnibus ferè hujus libri Sexti Propoſitionibus accommodatur, vt poſteriùs cognoſcent qui compoſitiones Figurarum diligenter attenderint.

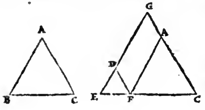
THEOREMA 4, PROPOSITIO IIII.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων, ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

Æquiangulorum Triangulorum, latera quæ circum æquales angulos, ſunt proportionalia: & ſimilis ſunt rationis, quæ æqualibus angulis latera ſubtenduntur.

Sint Triangula A B C & D E F æquiangula: ſitq; angulus A, æqualis angulo D: & angulus B, angulo E: & angulus C, angulo F. Dico eſſe D E ad A B & D F ad A C, ſicut E F ad B C.

Producam vnum laterum alterutrius Trianguli, vt latus E F: & faciam F C æqualem B C. Tum à puncto F ducam F A æquidiſtantem E D & æqualem ipſi A B: Et connectam A C. Eritq; Triangulum A F C æquale & æquilaterum Triangulo A B C, per



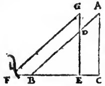
quartam Primi: propterea quòd angulus A F C æqualis eſt angulo B; per vigeſimamnonam ejuſdem, & duo latera A F & F C poſita ſunt æqualia duobus A B & B C. Ob id, angulus F A C æqualis

æqualis angulo B A C : ob idq; , angulo D. Reliquus igitur E F D reliquo C æqualis. Itaque , per priorem partem vigeſimæoctauæ ejuſdem , A C & D F Paralleli.. Productis igitur C A & E D, compleo Parallelogrammum F G. Et erit , per trigeſimamquartam Primi, A G æqualis D F : & D G æqualis A F. Quoniam ergo, per ſecundam hujus, G A ad A C ſicut E F ad F C : & per eandem, E F, ad F C ſicut E D ad D G : erit, per ſeptimam Quinti, D F (quia æqualis G A) ad A C: ac, per eandem, E D ad F A (æqualem ipſi D G) ſicut E F ad F C : Quod fuit demonſtrandum.

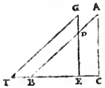
ALITER vt Theon. Eadem conſtructione , erit per ſecundam hujus , vt E D ad D G (ac propterea per vndecimam Quinti , vt E D ad F A) ſic E F ad F C. Et permutatim igitur , per decimamſextam Quinti, vt E D ad E F, ſic F A ad F C. Rurſus, per eandem hujus , vt E F ad F C, ita G A (ac propterea , ita D F) ad A C : Et permutatim vt E F ad D F, ita F C ad A C. Sed probatum eſt vt E D ad E F, ſic F A ad A C. Ex æquali igitur, per vigeſimamſecundam Quinti , vt E D ad D F , ita F A ad A C. Quare Triangulorum æquiangulorum latera proportionalia : Quod erat demonſtrandum.

QVVM autem hoc Theorema ſit vſitatiſſimum , neque ferè vllum in Dimenſionibus occurrat frequentiùs : triplicem Triangulorum Æquiangulorum conſtitutionem exponendam eſſe duximus : quarum primam jam tradidimus , ex veterum præſcripto : ſcilicet , quum Triangula ſuper eandem lineam rectam conſtruuntur : qualia hoc loco E D F & F A C , ſuper lineam E C : niſi quòd compoſitionem aliquantùm variauimus : ſchemate tamen eodem retento. Altera igitur oſtenſionis ratio erit ex Triangulis Æquiangulis, quæ aliud in aliud inſeruntur.

Sint duo Triangula A B C & D B E , æquiangula : vt angulus A ſit æqualis angulo D : & angulus B vnius, æqualis angulo B alterius : angulusq; C , angulo E. Dico eſſe B D ad B A & B E ad B C, vt D E ad A C.

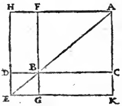


Quoniam enim angulus D æqualis eſt angulo A : erunt , per vigeſimamoctauam Primi , A C & D E paralleli. Protraho C B ad punctum F : & pono E F æqualem C B : Itidem protraho E D ad punctum G : & pono E G æqualem C A : &



connecto F G. Et quia angulus G E F æqualis eſt angulo C: & duo latera E F & E G ſunt æqualia duobus C B & C A: erit Triangulum G E F, Triangulo A B C æquale & æquilaterum, per quartam Primi: & per vigeſimamoctauam ejuſdem, F G ipſi B A parallelus. Sic itaque argumentationem inſtituemus. Quoniam D B ipſi A C eſt parallelus: erit, per ſecundam hujus, A D ad D B vt C E ad E B: Quapropter conjunctim, per decimamoctauam Quinti, vt A B ad D B, ſic C B ad E B. Simili ratione, quia B D ipſi F G eſt parallelus: erit, per ſecundam hujus, F B ad B E vt G D ad D E: Ergo conjunctim, F B (ac propterea, B C) ad B E, ſicut G E (ac propterea, ſicut A C) ad D E. At probatum eſt vt A B ad D B, ſic C B ad E B. Quare, per vndecimam Quinti, vt A B ad D B & C B ad E B, ita A C ad D E: Quod erat demonſtrandum. Atque ea eſt altera Triangulorum Æquiangulorum compoſitio.

Tertia verò eſt ad decuſſationem inter duas parallelos: qualia ſunt in ſubjecta Figura Gnomonica, duo Triangula A B C & B D E: quorum duæ baſes A C & D E ſunt paralleli: atque inter has, duæ lineæ A E & C D, ſe decuſſantes in puncto B, ac duo ipſa Triangula A B C & B D E cum ipſis parallelis, conſtituentes. Figuram autem Gnomonicam compleuimus, vt fœcunditatem ipſius vbique obuiam oſtenderemus. Habes enim vno intuitu triplicem poſitionem Triangulorum Æquiangulorum. Scilicet in dimidio Parallelogrammo, duorum Triangulorum A B C & B E G, ſuper A E Dimetiente: ac tantundem in altera medietate Parallelogrammi. Quæ poſitio ad primam demonſtrationem pertinet. Alteram duorum Triangulorum A E K & B E G, etiam æquiangulorum: quorum minus intra majus inſitum eſt: ſicut & B E D in A E H. Quod in ſecunda formula exhibuimus.



Tertiam habes poſitionem duorum A B C & B D E, itidemq; A B F & B E G. Quorum probatio ſatis manifeſta eſt, ex iis, quæ jam antè tradidimus.

A T Q V E hîc etiam, ſi diligenter animaduerteris, comperies,

ex Triangulorum probatione, Parallelogrammorum probationem conſequi: quum conſtiterit ſicut A C ad C B, ita B G ad G E. Sed hæc jam pluribus verbis non indigent.

Quarta erat Triangulorum Æquiangulorum poſitio circa eandem Dimetientem: qualia ſunt A B C & A B F: item B E G & B E D. Quæ quia ſunt æqualia, demonſtrationem non requirunt, ſed ad aliorum probationem accommodantur.

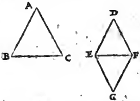
THEOREMA 5. PROPOSITIO V.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι.

Triangula proportionalium laterum, æquales habent angulos ſub quibus latera proportionalia ſubtenduntur.

Hæc eſt Conuerſa antecedentis. Sint duo Triangula A B C & D E F: ſitq; A B ad D E, & A C ad D F, vt B C ad E F. Dico angulum A eſſe æqualem angulo D: & angulum B, angulo E: & angulum C, angulo F.

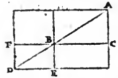
Super lineam E F, ex aduerſa parte Trianguli D E F, conſtituam, per vigeſimamtertiam Primi, angulum F E G æqualem angulo B: & angulum E F G æqualem angulo C. Eruntq; duo conſtituti, minores duobus rectis, quia æquales minoribus duobus rectis, per decimamſeptimam Primi. Concurrent igitur E G & F G, vt ad punctum G. Eritq; angulus G, per trigeſimamſecundam Primi, æqualis angulo A. Itaque, per antecedentem, A B ad E G & A C ad F G, vt B C ad E F: ob idq;, A B ad D E ſicut ad E G: & A C ad D F ſicut ad F G, per vndecimam Quinti. Igitur, per alteram partem nonæ ejuſdem, erit D E æqualis E G: & D F æqualis F G. Quapropter, ex octaua Primi, duo Triangula D E F & G E F ſunt æquiangula. Quum igitur Triangulum G E F ſit æquiangulum Triangulo A B C: erit & D E F eidem A B C æquiangulum: Quod erat demonſtrandum.



SED & hæc probatio ex Figura Gnomonica elicitur. Sint

enim duo Triangula A B C & D B E: ſitq; A B ad A C, vt B D ad B E: & A B ad B C, vt B D ad E D. Dico angulos proportionalibus lateribus contentos, eſſe æquales.

Ponam latus A B vnius, in directum lateris B D alterius: vt ſint A B C & B D E Triangula, ſuper lineam vnam A D. Et ducam D F parallelum ipſi C A, quæ concurrat cum C B protracto ad punctum F.



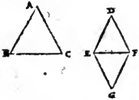
Quia ergo, per decimamquintam Primi, angulus D B F æqualis eſt angulo A B C: &, per vigeſimamnonam ejuſdem, angulus B D F, angulo B A C: erunt, per trigeſimamſecundam ejuſdem, duo Triangula A B C & B F D, æquiangula. Itaque, per antecedentem, vt A B ad A C, ſic B D ad D F. Sed vt A B ad A C, ſic poſitum eſt B D ad B E. Eſt igitur, per nonam Quinti, D F ipſi E B æqualis. Rurſus, per antecedentem, vt A B ad B C, ſic B D ad B F. Sed vt A B ad B C, ſic B D ad D E. Sunt igitur, per eandem Quinti, B F & E D latera æqualia. Itaque, per octauam Primi, duo B D F & B E D Triangula ſunt æquiangula. Quare A B C & B D E æquiangula: Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 6, PROPOSITIO VI.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Duo Triangula, vnum angulum vni angulo æqualem habentia, & quæ circum æquales angulos latera proportionalia: inter ſe ſunt æquiangula.

Sint duo Triangula A B C & D E F: ſitq; angulus B æqualis angulo E: & A B ad D E vt B C ad E F. Dico duo Triangula eſſe æquiangula.



Maneat, vt in priori figuratione antecedentis, Triangulum E G F ex aduerſo Trianguli D E F, æquiangulum ipſi A B C. Et erit, per quartam hujus, A B ad B C vt E G ad E F: ob idq;, ex ipſa hypotheſi & vndecima Quinti, A B ad D E vt A B ad E G. Itaque, per ſecundam partem

partem nonæ Quinti, D E eſt æqualis E G. Quia ergo duo latera D E & E F, Trianguli D E F, ſunt æqualia duobus E G & E F, Trianguli E G F: & angulus E vnius, æqualis angulo E alterius, quum vterque ſit æqualis angulo B: erunt, per quartam Primi, D E F & G E F æquiangula. Quum igitur E G F ſit ipſi A B C æquiangulum: erit & D E F eidem A B C æquiangulum: Quod erat demonſtrandum. Sed & idem ex Figura Gnomonica probabitur.

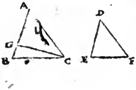
THEOREMA 7, PROPOSITIO VII.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

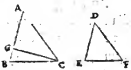
Si duo Triangula vnum angulum vni angulo æqualem habuerint, & quæ circa duos ex reliquis angulis latera, proportionalia: reliquorum verò duorum vterque aut neuter fuerit recto minor: æquiangula erũt Triangula, & anguli proportionalibus lateribus contenti, æquales.

Sint duo Triangula A B C & D E F: ſitq; angulus A æqualis angulo D, & ratio A C ad D F vt C B ad F E: & vterque duorum angulorum B & E, aut neuter ſit minor recto. Dico Triangula eſſe æquiangula, & angulos proportionalibus lateribus contentos eſſe æquales.

Iam enim ſi angulus C fuerit æqualis angulo F, conſtat ipſa eſſe æquiangula, ex antecedente. Si verò inæquales fuerint, ſit major C: & ponatur angulus A C G æqualis angulo F, per vigeſimamtertiam Primi. Eritq;, per trigeſimamſecundam ejuſdem, Triangulum A G C, Triangulo D E F æquiangulum. Itaq;, per quartam hujus, A C ad D F vt G C ad E F. Sed ſic fuit B C ad E F. Igitur, per nonam Quinti, G C & B C ſunt æquales: ob idq;, per quintam Primi, angulus B, æqualis angulo B G C. Si ergo neuter duorum B & E fuerit minor recto, erunt duo anguli B & G, Trianguli



B G C,



B G C, non minores duobus rectis, repugnante decimaſeptima Primi. Sin vterque fuerit minor recto, erit angulus A G C major recto, per decimamtertiam ejuſdem, ac propterea angulus E major recto, contra hypotheſin. Non ergo inæqualis eſt angulus A C B ipſi F angulo. Quare A B C Triangulum, ipſi D E F Triangulo æquiangulum, & anguli proportionalibus lateribus comprehenſi æquales; Quod erat demonſtrandum.

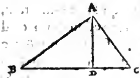
PONITVR autem vterque C & E, aut neuter minor recto: vt deducamus ad abſurdum. Scilicet quum reperiantur duæ lineæ G C & B C æquales, erunt duo anguli B & C G B æquales, per quintam Primi. Si ergo vterque E & B ſit minor recto, erit & A G C minor recto, vtpotè ipſi E æqualis. Quare, per decimamtertiam Primi, erit C G B major recto: ergo & B major eodem: qui poſitus fuerat minor. Si verò neuter B & E ſit minor recto, erit vterque, minimùm, rectus: Quapropter & C G B rectus, per quintam Primi: repugnante decimaſeptima ejuſdem.

THEOREMA 8. PROPOSITIO VIII.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ, καὶ ἀλλήλοις.

Ab angulo recto Trianguli perpendicularis ad baſin demiſſa, Triangulum in duo Triangula ſecat, ſimilia toti, & inter ſe.

Sit Triangulum A B C, cujus angulus A rectus: ſitq; A D perpendicularis ad B C baſin. Dico duo Triangula A B D & A D C, toti A B C Triangulo & inter ſe eſſe ſimilia.



Nam quum vtrumque ſit rectangulum, & vterque habeat vnum angulorum toti Triangulo communem: erunt per trigeſimamſecundam Primi, toti æquiangula: quapropter & inter ſe. Scilicet, angulus B æqualis angulo C A D: & angulus C, angulo B A D: & duo anguli qui ad D, recti ſicut & angulus B A C. Quod & nos ſuprà ad quadrageſimamſeptimam

ſeptimam Primi demonſtrauimus. Itaq;, per quartam hujus, latera æquos angulos continentia, proportionalia. Quare Triangula, toti & inter ſe ſimilia: Quod fuit oſtendendum.

Conſectarium.

Perpendicularis à recto angulo Trianguli ad baſin deducta, inter duo baſis ſegmenta proportionalis eſt: Et vtrumuis laterum inter baſin & ſegmentum ſibi coterminum, proportionale.

Vt A D perpendicularis, media proportionalis eſt inter B D & D C ſegmenta. Et A B latus, inter B C baſin & B D ſegmentum: itidem A C latus, inter ipſam B C baſin & D C ſegmentum, proportionale eſt.

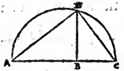
PROBLEMA I. PROPOSITIO IX.

Theoni 13.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Inter duas lineas rectas, mediam proportionalem inuenire.

Sint duæ lineæ rectæ A B & B C, inter quas ſit inuenienda media proportionalis.



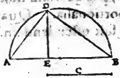
Ponam B C in continuum ipſius A B: vt ſit A C linea vna. Super quam deſcribam Semicirculum A D C. Et à puncto B, erigam B D perpendicularem. Hanc dico eſſe mediam inter A B & B C.

Connectantur D A & D C. Et erit, per trigeſimam tertij, angulus A D C rectus. Quare, per Conſectarium antecedentis, A B ad B D vt B D ad B C: Quod erat faciendum.

Aliter. Sint duæ lineæ A B & C, quarum major A B: (Nam inter æquales, media eſt æqualis). Volo inter ipſas conſtituere proportionalem.

Super A B deſcribo Semicirculum A D B: & pono E B æqualem ipſi C. Tum ab E puncto, excito perpendicularem E D: Et

K conn



connecto A D & B D. Dico B D eſſe medium proportionalem inter A B & E B: hoc eſt, inter A B & C.

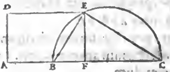
Conſtat quippè, ex trigeſima Tertij, angulum A D B eſſe rectum: & ex antecedente, duo Triangula A E D & B E D eſſe inter ſe & toti A D B ſimilia. Quare, per quartam hujus, A B ad B D vt B D ad E B: ob idq;, vt B D ad C: Quod erat faciendum.

IN hac igitur conſtructione, vno intuitu triplex conſpicitur proportionalitas. Eſt enim B D media inter A B & E B, vt jam probauimus: ſed & A D media inter A B & A E: Ac tertio E D media inter A E & E B ſegmenta.

Dato Medio proportionali, in data linea duo extrema reperire. Oportet autem datum Medium dimidia parte data linea non eſſe majus.

Sit datum Medium A B, data verò linea B C. Volo in B C duo extrema proportionalia reperire, inter quæ ſit A B medium proportionale. Modò tamen A B non ſit majus dimidia parte ipſius B C. Nam ſic medium eſſe non poſſet.

Iungo A B & B C, vt A C ſit linea vna. Tum ſuper B C deſcribo Semicirculum B E C. Et à puncto A, erigo perpendicularem A D: quam pono ipſi A B æqualem. Et per punctum D duco D E, parallelum ipſi A C: quæ omninò ſecabit, aut continget Semicirculum, vt in puncto E: quum A D non ſit major Semidiametro. Tum à puncto E, demitto E F perpendicularem ipſi B C. Dico B C ſic diuiſam in puncto F, vt A B ſit media proportionalis inter B F & F C.



Hoc autem ſatis manifeſtum eſt ex ipſa trigeſima Tertij & Conſectario antecedentis. Nam quum F E ſit æqualis A D, per trigeſimamquartam Primi: ob idq;, ipſi A B: ductis lineis B E & C E, fiet Triangulum B E C Rectangulum. Ob id, ex ipſo Conſectario, erit B F ad F E (ob idq;, ad ipſam A B) vt F E ad F C: Quod fuit faciendum.

PROBLEMA 2. PROPOSITIO X.
Theoni 11.

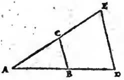
Duo

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Duabus lineis propoſitis tertiam continuè proportionalem adjungere.

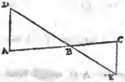
Sint duæ lineæ A B & A C, quibus ſit addenda tertia continuè proportionalis.

Conjungo ipſas A C & A B ad angulum arbitrarium B A C. Tum protractâ A B, facio B D æqualem ipſi A C. Et connexâ B C, duco D E, parallelum ipſi B C: & protraho A C: donec concurrat cum D E ad E punctum. Dico lineam C E eſſe tertiam ad duas A B & A C continuè proportionalem.

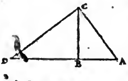


Eſt enim, per ſecundam hujus, A B ad B D ſicut A C ad C E: Sed A B ad B D ſicut A B ad A C, per alteram partem ſeptimæ Quinti. Quare A B ad A C ſicut A C ad C E: Quod erat faciendum.

ALITER. Conſtituo A B & B C datas, in directum. Tum ſuper punctum A erigo A D lineam, ad angulum arbitrarium: quam facio æqualem ipſi B C. Et à puncto D, per punctum B, duco tranſverſam D B: ad quam demitto concurrentem C E, parallelum ipſi A D. Dico C E eſſe tertiam proportionalem ad A B & B C. Quum enim, per decimamquintam Primi, angulus B, Trianguli A B D, ſit æqualis angulo B, Trianguli C B E: & per vigeſimamnonam ejuſdem angulus A æqualis angulo C, & angulus D angulo E: erit, per quartam hujus, A B ad D A ſicut D C ad C E. Quare, per vndecimam Quinti, A B ad B C ſicut B C ad C E: Quod erat faciendum.



ALITER rurſus. Conſtituo ipſas A B & B C ad angulum rectum A B C. Et connexâ A C, duco à puncto C, perpendicularem C D: quam produco donec concurrat cum A B protracta, ad punctum D. Dico B D eſſe tertiam proportionalem ad A B & B C. Id verò ſatis conſtat ex Conſectario octauæ hujus.



PROBLEMA 3. PROPOSITIO XI.

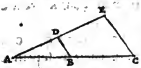
Theoni problema 4. propoſitio 12.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Tribus lineis propoſitis quartam proportionalem adjungere.

Sint tres lineæ A B, B C, & A D. Volo his tribus quartam proportionalem adjungere.

Ex A B & B C facio lineam vnam A C: & ſtatuo A D cum A C, ad angulum fortuitum C A D: & connecto D B: cui duco parallelum C E. Tum protraho A D donec concurrat cum C E ad

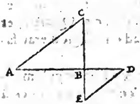


ipſum E punctum. Dico D E eſſe quartam proportionalem ad A B, B C, & A D.

Erit enim, per ſecundam hujus, ſicut A B ad B C; ita A D ad D E: Quod erat faciendum. Sed & hoc patebat ex antecedente: Modò tamen animaduertas, tam Continuam quàm Incontinuam proportionalitatem hîc probari: quas Euclides ſeparatim non tractat: vt in Definitionibus Quinti monuimus.

Aliter. Sint tres lineæ A B, B C, & B D. Volo ad ipſas addere quartam proportionalem.

Conjungo A B primam cum B D tertia: vt ſit A D linea vna. Ac ſuper hanc erigo B C ſecundam, ad angulum fortuitum A B C: Et connecto A C. Tum per punctum D duco D E ipſi A C parallelum: quam produco donec concurrat cum C B itidem protracta ad punctum E. Dico B E eſſe quartam proportionalem ad ipſas A B, B C & B D: eſſe ſcilicet vt A B ad B C, ita B D ad B E.



Quum enim, ex decimaquinta & vigeſimanona Primi, duo Triangula A B C & D B E ſint æquiangula: erit, per quartam hujus, A B ad B C vt B D ad B E: Quod erat faciendum.

Hanc Campanus antecedenti Propoſitioni annexuit, vt Appendicem.

PROB

PROBLEMA 4. PROPOSITIO XII.

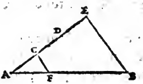
Theoni problema 1. propoſitio 9.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

A data linea conſtitutam partem abſcindere.

Sit data linea A B, à qua ſit reſecanda, verbi gratiâ, pars tertia.

Duco lineam A C, quæ cum A B faciat angulum fortuitum C A B. Et in directum A C, continuo C D, & D E, ipſi A C æquales: vt ſit A E in tres æquales partes diuiſa, in punctis C & D. Et connecto E B. Tum à puncto C duco C F parallelum ipſi B E, ſecantem A B in puncto F. Dico A F eſſe tertiam partem lineæ A B.

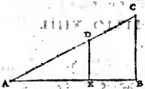


Quoniam enim, per ſecundam hujus, E C ad C A vt B F ad F A: erit conjunctim, E A ad C A vt B A ad F A. Sed A E ad C A tripla: igitur & B A ad F A tripla. Quare A F ipſius A B tertia pars: Quod erat faciendum.

SED quoniam minutę denominationes, quales ſunt Superpartientes & Superparticulares, non ita ſunt expeditæ: id negotij obiter explicabimus.

Sit linea A B, à qua reſecanda ſit pars ſubſupertripartiens quintas.

Quum Octonarius ad Quinarium ſit ſupertripartiens quintas: ex octo lineolis æqualibus, faciam lineam vnam: cujuſmodi hoc loco eſt linea A C: quam conjungam ad angulum fortuitum cum ipſa A B diuidenda. Et connexâ B C, per punctum quintæ ſectionis, quod ſit D, ducam D E parallelum ipſi B C. Eritq; A E ipſa pars quam quærimus lineæ A B, ſcilicet ſubſupertripartiẽs quintas. Quod delineatio ipſa ſatis oſtendit. Nam quum A D ſit ad A C ſupertripartiens quintas: ſitq;, ex poſtrema probatione, vt A D ad A C, ſic A E ad A B: erit & A E ad A B ſubſupertripartiens quintas: Quod fuit oſtendendum.

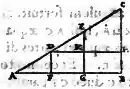


PROBLEMA 5. PROPOSITIO XIII.

Theoni problema 2. propoſitio 10.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

Datam lineam non ſectam, datæ lineæ ſectæ ſimiliter ſecare.



Sit data linea non ſecta, A B: ſecta verò ſit A C, verbi gratiâ, in tres partes quantaſcumque, A D, D E, & E C. Volo lineam A B in tot ſimiles partes diuidere.

Iungo A B & A C ad angulum pro arbitrio, B A C. Et connecto B C: Cui per puncta D & E duco parallelos D F & E G. Has dico diuidere lineam A B in partes ſimiles partibus lineæ A C.

Ducam D H parallelum ipſi A B, ſecantem B C in puncto H: & G E in puncto K. Et ſumptis duobus Triangulis A B C & D H C, erit, per ſecundam hujus, E D ad D A vt G F ad F A: ſimiliter C E ad E D vt H K ad K D: ob idq́; , vt B G ad G F, per trigeſimamquartam Primi, & ſecundam partem ſeptimæ Quinti: Quod erat faciendum. Toties verò repetitur ſecunda hujus, quot erunt paralleli ipſi B C: ſed toties trigeſimaquarta Primi & ſeptima Quinti, quot erunt ipſi A B paralleli.

E x hac habetur facilis ratio diuidendæ lineæ in quaſcumque partes nominatas. Vt ſi tripartitò ſecanda ſit: fiet D E æqualis A D: & E C æqualis eidem, per tertiam Primi. Ac tum eodem conſtructionis modo quo jam vſi ſumus, ſecabitur A B in tres partes æquales.

Idem de cujuſcumque generis partibus erit judicium.

THEOREMA 8. PROPOSITIO XIIII.

Campano 13.

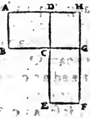
Τῶν ἴσων τε καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, παραλληλογράμμων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Æqualium Parallelogrammorum, & vnum vni æqualem

æqualem angulum habentium, reciproca ſunt latera quæ circum æquales ſunt angulos: Et quorum Parallelogrammorum vnum vni æqualem angulum habentium, reciproca ſunt latera quæ circum æquales angulos, ea ſunt æqualia.

Sint duo Parallelogramma A B C D & C E F G, æqualia: ſitq; angulus C vnius, æqualis angulo C alterius. Dico eſſe B C ad C G vt E C ad C D. Et ſi fuerit B C ad C G vt E C ad C D, fuerintq; ij duo comprehenſi anguli æquales: Dico duo Parallelogramma eſſe æqualia.

Ponam duo latera B C & C G in directum, vt ſit B G linea vna. Eritq; E D itidem linea vna, per ea quæ demonſtrauimus ad decimamquintam Primi. Produco itaque A D & F G latera donec concurrant ad punctum H. Et erit, per priorem partem ſeptimæ Quinti, vtriuſque Parallelogrammi A C & C F ad Parallelogrammum C H, ratio eadem. Et quia, per primam hujus, Parallelogrammum A C ad Parallelogrammum C H eſt vt B C baſis ad C G baſin: & Parallelogrammum C F ad idem C H, vt E C baſis ad C D baſin: erit, per vndecimam Quinti, B C ad C G vt E C ad C D: Quod eſt prius.



Eſto jam B C ad C G vt E C ad C D. Et erit, per primam hujus, B C baſis ad C G baſin, vt A C Parallelogrammum ad C H Parallelogrammum: Et E C baſis ad C D baſin, vt C F Parallelogrammum ad idem C H Parallelogrammum. Itaque, per vndecimam Quinti, A C ad C H vt C F ad idem C H. Quare, per priorem partem nonæ ejuſdem, Parallelogrammum A C, Parallelogrammo C F eſt æquale: Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 10, PROPOSITIO XV.

Campano 14.

Τῶν ἴσων, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

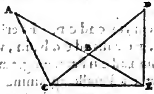
Æqual

Æqualium Triangulorum, & vnum vni æqualem angulum habẽtium, reciproca ſunt latera quæ circum æquales angulos: Et quorum Triangulorum vnum vni æqualem angulum habentium reciproca ſunt latera quæ circum æquales ſunt angulos, ea ſunt æqualia.

Sint duo Triangula æqualia A B C & B D E: ſitq; angulus B vnius, æqualis angulo B alterius. Dico A B ad B E eſſe vt D B ad B C: Et ſi fuerit A B ad B E vt D B ad B C, fuerintq; duo anguli, qui ad B, æquales, Triangula eſſe æqualia.

Iungam duo latera A B & B E, vt ſit A E linea vna. Et erit D C linea vna, eadẽ ratione qua in antecedẽte: ſcilicet, per Conuerſam Decimæquintæ Primi. Et connectam C E. Eritq;, per priorẽ partem ſeptimæ Quinti, vtriuſque Trianguli A B C & B D E, ad Triangulum C B E ratio eadem, & quia, per primam hujus, eſt A B C ad B E C vt A B ad B E: & B D E ad idem B E C vt D B ad B C: erit, per vndecimam Quinti A B ad B E vt D B ad B C: Quod eſt prius.

Eſto jam A B ad B E vt D B ad B C, ſintq; duo anguli qui ad B, æquales. Et erit, per primam hujus, A B ad B E vt A B C ad B E C: & D B ad B E vt D E B ad idem B E C. Eſt igitur, per vndecimam Quinti, vtriuſque A B C & D E B ad B E C, ratio eadem. Quare, per priorem partem nonæ ejuſdem, ipſa A B C & D E B ſunt æqualia: Quod fuit demonſtrandum.



HÆC figuratio, ſi intelligatur connexa A D, erit Quadrilatera cum duabus Dimetientibus. Sed non oportuit eſſe æquidiſtantium laterum, quum de ſolis Triangulis ageretur: neque iis æquiangulis. Nam ſic eſſent A C & D E paralleli.

Cæterùm hæc mutuorum laterum in Triangulis comparatio, ſic colligitur: vt ſit A B ſuperior ad ſuam directam B E, ſicut D B itidem ſuperior, ad ſuam directam B C. Nam ſi diceretur A B ſuperior, ad B E, vt C B inferior, ad B D: non reſponderent ſingula ſingulis: neque eſſet mutua comparatio. Idem intelligo de permutatione aut conuerſione.

Atque

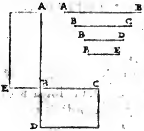
Atque hoc notabile eſt ad reciprocationis cognitionem. Hoc igitur totum ex duabus Dimetientibus Quadrilateri ſe decuſſantibus pendet.

THEOREMA 11, PROPOSITIO XVI.
Campano 15.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Si quatuor lineæ proportionales fuerint, quod ſub extremis continetur Rectangulum, æquale eſt ei quod ſub mediis: Et ſi ſub extremis comprehenſum Rectangulum æquale fuerit ei quod ſub mediis, quatuor lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor lineæ A B, B C, B D, & B E proportionales, vt A B ad B C, ita B D ad B E. Dico Rectangulum comprehenſum



ſub A B & B E, eſſe æquale Rectangulo comprehenſo ſub B C & B D: & ſi Rectangulum comprehenſum ſub A B & E B, ſit æquale Rectangulo quod ſub B C & B D; dico & eſſe A B ad B C vt B D ad B E.

Fiat Rectangulum A E ex A B & B E: Rectangulum quoque C D, ex B C & B D. Et ſtatuantur ad angulos contra ſe poſitos, qui ad B: vt clariùs ſit, totum ex Figura Gnomonica pendere.

Quum itaque ſit A B ad B C vt B D ad B E: erit permutatim, A B ad B D vt B C ad B E. Quapropter, in quocumque ſint ſitu Rectangula, quum ſint anguli vndiquaque æquales, erunt latera reciprocè proportionalia. Quare, per ſecundam partem decimæquartæ hujus, Parallelogramma æqualia: Quod eſt prius.

Secundum patet ex priori parte ejuſdem. Si enim ſint Parallelogramma æqualia: quum omnes anguli ſint æquales, latera

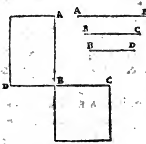
tera erunt reciproca. Quare in hoc ſitu A D lineæ vnius, erit A B ad B D vt B C ad B E: hoc eſt, permutatim, A B ad B C vt B D ad B E: Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 12. PROPOSITIO XVII. Campano 16.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Si tres lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis continetur Rectangulum, æquale eſt ei quod à media fit Quadrato: Et ſi ſub extremis cōprehenſum Rectangulum, æquale fuerit ei quod à media fit Quadrato: ipſæ tres lineæ proportionales erunt.

Sit linea A B ad lineam B C, vt eadem B C, ad tertiam B D. Dico Rectangulum comprehenſum ſub A B & B D eſſe æquale Quadrato quod ex B C. Et ſi Rectangulum comprehenſum ſub A B & B D ſit æquale Quadrato B C: eſſe A B ad B C vt B C ad B D.



Hoc autem ſatis manifeſtum eſt ex antecedente. Nam linea B C, hoc loco eſt pro ſecunda & tertia: B D autem quarta. Hoc igitur Theorema ſuperiori connecti poterat, vt Conſectarium.

THEOREMA 13. PROPOSITIO XVIII. Theoni 19.

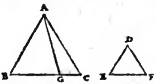
Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Similia Triangula duplam inter ſe habēt rationem, quàm ſimilis rationis latera.

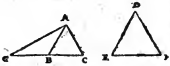
Sint duo Triangula, A B C & D E F, ſimilia: hoc eſt, per pri-

mam

mam Definitionem hujus, æquiangula, & laterum proportionalium: Et ſit angulus A æqualis angulo D: angulus B, angulo E: & angulus C, angulo F: ſitq; A B ad D E & A C ad D F vt B C ad E F. Dico duplam eſſe rationem Trianguli A B C ad Triangulum D E F, quàm B C ad E F.



Duabus enim lineis B C & E F addo tertiam C G, per decimam hujus, continuè proportionalem: reſectâ B C, aut eadem protractâ, vt major aut minor fuerit quàm E F (cujuſmodi hîc dupliciter figurauimus). Et connecto G A. Eritq;, per alteram partem decimæquintæ hujus, Triangulum A G C, æquale Triangulo D E F: quum ſit A C poſitum ad D F vt E F ad G C, & ſit angulus C, angulo F æqualis. Itaq;, per ſecundam partem ſeptimæ Quinti, erit Trianguli A B C ad vtrumque ipſorum A G C & D E F, ratio eadem. Atqui Triangulum B A C, per primam hujus, ad Triangulum A G C, eſt vt B C ad G C: ſed B C ad G C ratio, eſt vt B C ad E F duplicata, per decimam Definitionem Quinti. Quare Trianguli A B C ad Triangulum D E F ratio, eſt vt B C ad D F duplicata: Quod erat demonſtrandum.



Iam verò ſi C G ſit æqualis B C, erit, per alteram partem decimæquintæ hujus, Triangulum A B C æquale Triangulo D E F. Æqualis autem proportio, quocumque modo multiplicetur, manet eadem: quum ab vnitate denominationem ſumat, quæ ipſa ſui eſt Quadrum, Cubus: ac in vniuerſum in ſe ducta, ſemper ſibi æqualis.

THEOREMA 14, PROPOSITIO XIX.

Theoni 20, Campano 18.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις· καὶ τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Similia Polygona, in ſimilia totidemq; numero Triangula diuiduntur. Et Polygonum ad ſimile Poly-

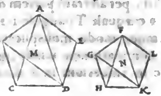
L 2 gonum

gonum duplam habet rationem, quàm latus ad ſimilis rationis latus.

Sint Polygona ſimilia, ac in præſens Pentagona, A B C D E & F G H K L. Hæc dico diuidi in Triangula inter ſe ſimilia,& numero æqualia: Atque inſuper, eſſe vtrumque illorum ad alterum, vt proportio lateris A B ad F G latus ſimile duplicata.

Connectantur A C & A D: itidem F H & F K. Eritq; propter ſimilitudinem Polygonorum & per ſextam hujus, Triangulum A B C, Triangulo F G H æquiangulum: & Triangulum A E D, Triãgulo F L K. Ob id, quum Pẽtagona ſint, ex poſitu, æquiangula & laterum proportionalium: erit & Triangulum A C D, Triangulo F H K æquiangulum. Sicq; vtrumque alteri ſimile, per quartam hujus & definitionem Similium Superficierum. Quare, quum æqualia ſint numero patet prior pars.

Altera autem ſic. Ducatur B D, quæ ſecet A C in puncto M: & G K, quæ ſecet F H in puncto N. Eritq; propter ſimilitudinem Polygonorum & per ſextam hujus, Triangulum B C D, Triangulo G H K æquiangulum: vnde & Triangulum A B M Triangulo F G N æquiangulum: Æquales enim ſunt anguli B A M & G F N, & ab æqualibus auferuntur A B M & F G N: ob id, per trigeſimamſecundam Primi, æquiangula. Eadem ratione A M D ipſi F N K æquiangulum: Quapropter, ex quarta hujus, B M ad



G N vt A M ad F N: itidem A M ad F N vt M D ad N K. Igitur, per vndecimã Quinti, B M ad G N vt M D ad N K: & permutatim, B M ad M D vt G N ad N K. Sed, per primã hujus, A B M ad A M D; & B C M ad C M D, vt B M ad M D: &, per eandem, F G N ad F N K, & G N H ad H N K, vt G N ad N K. Itaq; ex decimatertia Quinti, A B C ad A C D vt F G H ad F H K: & permutatim, A B C ad F G H vt A C D ad F H K. Eadem ratione ſi intellexerimus ductas E C & L H, probabitur ſic eſſe A C D ad F L K. Quare, per decimamtertiam Quinti, erit totius Pentagoni ratio ad totum Pentagonum, vt A B C ad F G H: ob idq; per antecedentem, vt A B ad F G duplicata: Quod erat demonſtrandum.

SED hoc poſterius caput in communi notione eſt. Nam quum

quum Triangula, in quæ reſoluuntur Pentagona, ſint æqualia numero, & inter ſe ſimilia: erit, per antecedentem, ratio A B C ad F G H vt B C ad G H duplicata: & A E D ad F L K vt D E ad K L duplicata. Atqui eæ omnes duplicatæ rationes ſunt æquales, quum earum ſimplices ſint æquales: erit igitur, per decimam-tertiam Quinti, ratio totius Pentagoni ad totum Pentagonũ, vt vnius laterum ad ſuum ſimile, duplicata: Quod erat probandum.

Conſectarium.

Si igitur tres lineæ proportionales fuerint: quanta eſt prima ad tertiam, tanta erit Superficies quæ ſuper primam, ad Superficiem quæ ſuper ſecundam: quum vtraque fuerit ſimilis & ſimiliter deſcripta.

Quod ex jam aſcripta deductione manifeſtum euadit.

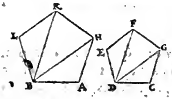
HVIC etiam Theoremati quidã aliud ſubjiciunt Conſectarium de Parallelogrammis Similibus, quòd in dupla ſint ratione, quàm ipſorum latera ſimiliter ſumpta: Sed hoc patet vel ex Triangulorum ſimilitudine. Triangula enim, vt jam non ſemel monuimus, dimidia ſunt Quadrilaterorum. Immò & Theorema ſi de Rectilineis pronunciaſſet, vniuerſam peræquè habuiſſet probationem, atque de Polygonis.

PROBLEMA 6, PROPOSITIO XX.

Theoni 19, Campano 18.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Super data linea, datæ Superficiei rectilineæ ſimilẽ Superficiem ſimiliterq́; poſitam deſcribere.

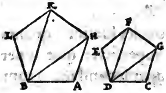


Sit data linea A B, data verò Superficies in præſens Pentagona, C D E F G. Volo ſuper A B conſtituere Superficiem ipſi C D E F G ſimilem & ſimiliter poſitam.

Reſoluo datam Superficiem in

Triangula, ductis lineis D F & D G. Tum ſuper puncto A, conſtituo angulum B A H, æqualem angulo C. Iridem ſuper puncto B, conſtituo angulum A B H, æqualem angulo C D G: ducta B H, quæ concurrat cum A H ad punctum H.

Et erit, per trigeſimamſecundam Primi, angulus A H B æqualis angulo C D G: ob id, per quartam hujus, latera duorum Triangulorum G C D & H A B, proportionalia. Pono etiam angulum H B K, æqualem angulo G D F: & angulum B H K, angulo D G F: angulum verò K B L, angulo F D E: ac demùm angulum B K L, æqualem angulo D F E. Ac tum erit completum Pentagonum ſuper linea A B, quale quærimus. Eſt enim in Triangula æqualia numero & æquiangula diuiſum, vt Pentagonũ C D E F G. Quare eidem ſimile: Quod erat faciendum.



VT autem hoc loco obiter explicemus quid ſimiliter poſitum dicatur in Superficiebus: id eſt, ſi occurrat Superficies, cujuſmodi eſt hoc loco Pentagonum C D E F G, cui ſuper linea A B ſit conſtituenda Superficies ſimilis & ſimiliter deſcripta, vt attendamus an ipſa A B comparetur lateri D C an lateri D E, an breuiter cuipiam laterum Figuræ oblatæ: eámque lineam comparationi accommodemus. Poſſet enim fieri angulus B A H æqualis angulo C D E, atque eo inſtituto perfici Figura: quæ vt ſimilis euaderet, non tamen ſimiliter eſſet deſcripta. Quod ſatis manifeſtum eſt, quum Figura quæ proponitur, non eſt æqualium laterum.

THEOREMA 15. PROPOSITIO XXI.

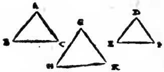
Campano 20.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.

Sint duo Rectilinea A B C & D E F: ſitq; vtrumque illorum ſimile Triangulo G H K: vt ſit A B ad A C, & D E ad D F, ſicut B C & E F ad H K: & anguli vtriuſque proportionalibus lateribus

cont



contenti, æquales ſint angulis Trianguli G H K. Dico ambo eſſe ſimilia.

Nam, per vndecimam Quinti, erit A B ad A C & D E ad D F vt B C ad E F: ob idq;, per quintam hujus erunt anguli ſub quibus latera proportionalia ſubtenduntur, æquales. Ambo igitur æquiangula: Quare, à definitione Similium Superficierum, inter ſe ſimilia: Quod fuit demonſtrandum.

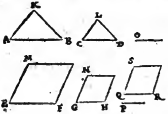
Hoc Theorema per ſe fuit manifeſtum, velut animi Notio. Nam, vt anteà docuimus, Similitudo Superficierum eſt æqualitas quædam.

THEOREMA 16. PROPOSITIO XXII.
Theoni 21.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται. κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

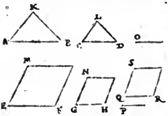
Si quatuor lineæ fuerint proportionales: erunt & ab eis Rectilinea ſimilia ſimiliterq; poſita, proportionalia: Et ſi ab eis Rectilinea ſimilia ſimiliterq; poſita, fuerint proportionalia: erunt & ipſæ proportionales.

Sint quatuor lineæ proportionales, A B, C D, E F, & G H: vt A B ad C D, ſic E F ad G H: ſimq; ab ipſis A B & C D, ſimilia ſimiliterq; deſcripta Rectilinea, quæ ſint Triangula, A B K & C D L: Ab ipſis verò E F & G H, ſimilia ſimiliterq; deſcripta, Parallelogramma M F & N H. Dico eſſe vt Triangulum A B K ad Triangulum C D L, ita Parallelogrammum M F ad Parallelogrammum N H.



Ponatur ad ipſas A B & C D, per decimam hujus, tertia proportionalis O: ad ipſas quoque E F & G H, tertia proportionalis P. Et quoniam vt A B ad C D, ſic E F ad G H: ſed & vt C D ad O, ſic G H ad P: ex æquali igitur, per vigeſimamſecundam Quinti, vt

ti, vt A B ad O, ſic E F ad P. Sed vt A B ad O, ſic Triangulum A B K ad Triangulum C D L, per Conſectarium decimænonæ hujus: Et per idem ipſum, vt E F ad P, ita Parallelogrammum M F ad Parallelogrammum N H. Vt igitur, per vndecimam Quinti, A B K Triangulum ad C D L Triangulum, ita M F Parallelogrammum ad N H Parallelogrammum: Quod eſt prius.



Sint verò duo Triangula A B K & C D L ſimilia & ſimiliter poſita: duoq; Parallelogramma M F & N H, ejuſmodi. Dico eſſe A B ad C D vt E F ad G H.

Ponatur, per duodecimam hujus, vt A B linea ad C D lineam, ita E F ad Q R: &, per vigeſimam hujuſce, deſcribatur ſuper Q R, Parallelogrammum Q R S vtrique ipſorum M F & N H ſimile ſimiliterq; poſitum. Et erit, per priorem partem hujus, vt A B K Triangulum, ad C D L Triangulum, ſic M F Parallelogrammum, ad S R Parallelogrammum. Sed ſic fuit M F ad N H. Igitur, per ſecundam partem nonæ Quinti, Parallelogrammum S R æquale eſt Parallelogrammo N H. Et quia ſunt ſimilia & ſimiliter poſita, æqualis erit linea G H, lineæ Q R, per ſecundam partem decimænonæ hujus. Nam quum ſit ratio N H Parallelogrammi ad S R Parallelogrammum, dupla quàm G H lineæ ad Q R lineam, eaq; æqualis: ipſa non niſi ex æquali produci poteſt. Quare vt A B ad C D, ita E F ad G H: Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 17. PROPOSITIO XXIII.

Campano 22. Theoni 24.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

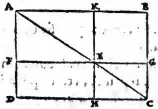
In omni Parallelogrammo, quæ circa Dimetientem Parallelogramma, ſimilia ſunt toti, & inter ſe.

In Parallelogrammo A B C D, ſint duo Complementa E H & F K, circa Dimetientem A C. Hæc dico eſſe toti B D & inter ſe ſimilia.

Eſt

Eſt enim, per ſecundam hujus, B G ad G C, & D H ad H C, vt A E ad E C: ob id, conjunctim, B G ad C G & D C ad C H, vt A C ad C E. Quapropter, ex vndecima Quinti, B C ad C G vt D C ad C H, igitur & vt A B ad E G: quum A B ſit æqualis D C, & E G æqualis H C.

Eadem argumentatione erit A D ad E H, vt A B ad E C, & vt D C ad H C. Quia ergo Parallelogramma ſunt æquiangula, erit, per definitionem Similium Superficierum, G H ſimile toti B D.

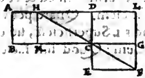


Haud diſſimili ratione probabitur F K eidem B D toti ſimile: quum ſit B A ad A K & D A ad A F, vt C A ad A E, per ſecundam hujus & Conjunctam proportionalitatem. Quapropter, ex vigeſima hujus, erit & F K ſimile G H. Sicq; conſtat Propoſitio.

S E D & hoc conſtabat ex Triangulis: ex iis ſcilicet quæ probauimus ad quartam hujus. Quum enim duo Triangula A B C & E G C ſint æquiangula, & laterum ad æquos angulos proportionalium: erit A B ad B C vt E G ad E C. Rurſus, quum A D C & E H C ſint ſimilia: erit A D ad D C vt E H ad H C. Quod & eodem argumento probabitur de duobus Triangulis A E F & A E K, ipſum F K Parallelogrammum complentibus. Sunt igitur F K & H G Parallelogramma, toti B D Parallelogrammo & inter ſe ſimilia: Quod erat demonſtrandum.

Ab hoc Theoremate non incommodè locum ſibi inueniet hoc Problema, quamuis idipſum jam antè proponi potuiſſet.

Propoſitis duobus Parallelogrammis æquiangulis, ſed non ſimilibus, ab vno illorum, Parallelogrammum alteri ſimile reſecare.



Sint duo Parallelogrãma A B C D & C E F G, æquiangula quidem, ſed diſſimilia. Volo ab ipſo A B C D reſecare proportionem ſimilem ipſi C E F G.

Sit ergo angulus C vnius, æqualis angulo C alterius: Sicq; ſtatuantur duo Parallelogramma, vt B G ſit linea vna, & D E altera. Tum ducatur tranſuerſa F C H, ſecans A D in puncto H: Et ducatur H K parallelus ipſi C D. Dico C D H K Parallelogrammum,

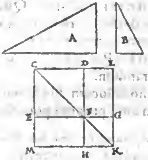
ex A C Parallelogrammo reſectum, eſſe ſimile ipſi E G Parallelogrammo.

Id veró ſatis conſtat ex hac vigeſimatertia: quum ambo ſint circa eandem Dimetientem. Atque ad clariorem notionem, perfeci A B G L Parallelogrammum. Hîc etiam ſibi locum inueniet hoc Problema,

Inter duas Superficies rectilineas mediam Superficiem proportionalem inuenire.

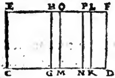
Sint duæ Superficies rectilineæ A & B, inter quas ſit collocanda media Superficies proportionalis.

Reduco ipſas ad duo Parallelogramma Similia, ſecundùm doctrinam decimæoctauæ hujus: (vel, ſi placet, vtramque ad Quadratum, ex vltima Secundi). Et ſint duo Parallelogramma C D E F & F G H K, ſimilia inter ſe, & duabus Superficiebus A & B mutuò æqualia. Tum pono angulos qui ad F ſunt æquales, alterum ex aduerſo alterius: vt ſint duo Parallelogramma E D & H G circa eandem Diametrum C K. Et perficio Parallelogrammum C L K M. Dico alterutrum Supplementorum F L, & F M, eſſe medium proportionale inter C F & F K: hoc eſt, inter A & B: eſſe ſcilicet vt H G Superficies ad F L Superficiem, ſic eandem F L ad E D Superficiem. Eſt enim, ex hac vigeſimatertia Propoſitione, linea H F ad lineam F D, vt linea G F ad lineam F E: At, per primam hujus, vt H F ad F D, ſic H G Superficies ad F L Superficiem: ſed & vt G F ad F E, ita F L Superficies ad E D Superficiem. Quare, per vndecimam Quinti, vt H G Superficies ad F L Superficiem, ſic eadem F L Superficies ad E D Superficiem: Quod fuit faciendum.



ALITER expeditiùs. Inter duas parallelos interminatas C D & E F, conſtituo Parallelogrammum C G E H, verbi gratiâ, Rectangulum: & inſuper, æquale Rectilineo A: per ea quæ docuimus ad quadrageſimamquartam Primi, ac eodem præcepto,

cepto, inter ipſas parallelos conſtituo alterum Parallelogrammum K D L F, æquiangulum ipſi C H Parallelogrammo, & æquale ipſi B Rectilineo. Iam in linea E F, inter ipſas C H & L D baſes, pono lineam M N media ratione proportionalem, per nonam hujus. Ductiſq; M O & N P parallelis ipſis G H & D F, conſtituo Superficiem æquidiſtantium laterum M P. Hanc dico eſſe media ratione proportionalem inter



duo C H & K F: ac propterea inter A & B Rectilinea.

Eſt enim, per primam hujus, vt C G baſis ad M N baſin, ſic C H Parallelogrammum ad M P: Et, per eandem, vt M N baſis ad K D baſin, ſic M P ad K F. Quare, per vndecimam Quinti, vt C H ad M P, ſic M P ad K F: Quod fuit probandum.

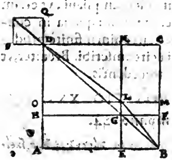
Sed nos priorem demonſtrationem aſtruximus, ad illuſtrandam vbique Figuram noſtram Gnomonicam.

THEOREMA 18, PROPOSITIO XXIIII.

Campano 23. Theoni 26.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

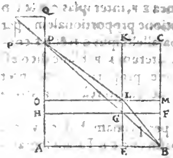
Si duo Parallelogrāma ſimilia & ſimiliter poſita, cōmunem angulū habuerint, aut angulum æqualem angulo æquali contrà poſitum habuerint: ambo circa eandem Dimetientem conſiſtunt.



Sint duo Parallelogramma ſimilia & ſimiliter poſita, A B C D & E B F G, communem habentia angulum qui ad B. Hæc dico eſſe circa vnam Dimetientem. Sint & duo Parallelogramma E F & H K ſimilia ſimiliterq; poſita: ſitq; angulus G vnius, æqualis angulo G alterius: & vterque alteri contrà poſitus. Dico etiamnum duo E F

 & H K

& H K Parallelogramma circa vnam Dimetientem conſiſtere.



Prius ſic probatur. Connectam B G & G D: quæ ſi vnica linea fuerit, patet Propoſitio. Sin minus, ſit B L D, Dimetiens: & ducatur M L O, parallelus ipſi E B, quæ ſecet B C & A D in punctis M & O.

Et erit, per antecedentem, Parallelogrammum E M ſimile toti A C: quapropter erit C B ad M B vt A B ad E B. At, ex hypotheſi, C B ad F B vt A B ad E B. Igitur, per vndecimam Quinti, C B ad F B vt C B ad M B. Quare, per ſecundam partem nonæ ejuſdem, F B æqualis M B, pars toti: Quod minimè conuenit.

Secundum ſic. Eductâ, vt modò, Dimetiente per L punctum, erit, per antecedentem, M B ad E B vt K L ad L O (hoc eſt, vt K L ad G H). At, ex hypotheſi, F B ad E B vt K G ad G H. Quare, per ipſam vndecimam Quinti, erit F B æqualis M B: & præterea K L ipſi K G, contra communem Senſum.

ALITER compendioſiùs. Parallelogrammum E M ſimile eſt toti A C, per antecedentem: quapropter & minori E F, per vigeſimamprimam hujus & hypotheſin: ſicq; latera proportionalia: Eritq; L M ad M B vt G F ad F B. Quum igitur G F ſit ipſi L M æqualis: erit, per ſeptimam Quinti, G F ad M B vt G F ad F B. Quare F B ipſi M B æqualis, pars toti: Quod eſt abſurdum.

HVIVS Propoſitionis ſententiam ideò ampliaui, vt etiam de Parallelogrammis connexis intelligeretur: qualia in conſtructione apparent A C & P Q. Dimetiens enim infinitè produci poteſt, & Parallelogramma ſimilia circumſcribi. Breuiter, vt hæc omni ex parte Conuerſa eſſet antecedentis.

THEOREMA 19. PROPOSITIO XXV.

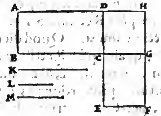
Theoni 23. Campano 24.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Æquian

Æquiangula Parallelogramma, rationem habent compoſitam ex alternorum laterum ratione.

Sint duo Parallelogramma, A B C D & C E F G æquiangula, & ſit angulus C vnius, æqualis angulo C alterius. Dico rationem vnius ad alterum, compoſitam ex ratione quæ eſt B C ad C G, & quæ D C ad C E.



Ponam ambo Parallelogramma ex aduerſo, vt B G ſit linea vna, & D E itidem vna: & perficiam Parallelogrammum A B G H. Ponam inſuper vt ſit linea K ad lineam L, vt B C ad C G: & eadem L ad M lineam, vt D C ad C E, ex præcepto duodecimæ hujus.

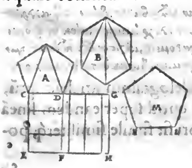
Eritq; per primam hujuſce & vndecimam Quinti, B D Parallelogrammum ad G H Parallelogrammum, vt K ad L: & D G Parallelogrammum ad C F Parallelogrammum, vt L ad M. Ex æquali igitur erit B D ad C F vt K ad M. Atqui ratio K ad M, producitur ex K ad L & ex L ad M, vt patet ex quinta Definitione hujus. Communi igitur judicio, producetur ratio B D ad C F, ex ratione B C ad C G & D C ad C E; Quod erat demõſtrandum.

PROBLEMA 7. PROPOSITIO XXVI.

Theoni & Campano 25.

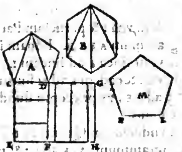
Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον, τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Dato Rectilineo, Rectilineum ſimile & alij dato æquale conſtituere.



Sint duo Rectilinea A & B. Volo Rectilineum conſtruere, ſimile A, & æquale B. Reſoluto vtroque in ſua Triangula, ſuper vno laterum ipſius A, quod ſit C D, conſtituo Parallelogrammum C D E F Rectangulum, æquale eidem A Rectilineo: per quadrage-

ſimamquartam Primi toties repetitam, quot fuerint triangula. Tum, per eandem, ſuper linea D F, ad angulum datum E C D, conſtituo Parallelogrammum D F G H, æquale ipſi B Rectilineo. Eritq́; per vigeſimam nonam Primi, & quartamdecimam ejuſdem, tota C H vna Superficies æquidiſtantium laterum. Pono poſtmodùm, per nonam hujus, lineam K L mediam proportionalem inter C D & D G lineas: Ac ſuper K L, per decimamnonam hujus, conſtituo ipſi A Rectilineo ſimile Rectilineum M. Quod dico eſſe æquale ipſi B Rectilineo. Nam quum C D, K L, & D G ſint continuè proportionales: erit, per Conſectarium decimænonæ hujus, Rectilineum cōſtitutum ſuper primam C D, ad ipſum M, conſtitutum ſuper K L ſecundam, vt C D linea prima ad D G tertiam: ob id, per primam hujus, vt C F ad F G: ob idq́; per priorem partem ſeptimæ Quinti, vt A ad F G: ac propterea, per ſecundam partem ejuſdem, vt A ad B. Quare, per ſecundam partem nonæ ejuſdem, erit M æquale B: Quod erat faciendum.



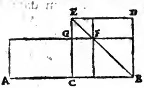
Sed erit promptius ex Permutata proportionalitate. Quum enim ſit A ad M vt C F ad F G; erit permutatim, A ad C F vt M ad F G. Quum igitur ſit A æquale C F, erit M æquale F G: Quare & æquale B: Quod erat conſtitutum.

THEOREMA 20, PROPOSITIO XXVII. Campano 26.

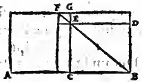
Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις, τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

Super dimidio lineæ Parallelogrammum deſcriptū, majus eſt Parallelogrammo, quod ſuper eandem lineā projectum, alteri quod priori ſit ſimile ſimiliterq́; poſitum ſpecie deficit.

Sit linea A B, ſuper cujus dimidio C B, deſcriptum ſit Parallelogrammum C B D E, cujus Dimetiens B E: & ſuper eandem A B ſit projectum A F Parallelogrammum, cujus vnum laterum ſecet latus C E in puncto G: deficiatq; ſpecie, Parallelogrammo F B, ſimili ſimiliterq; poſito ipſi C B D E. Dico Parallelogrammum C D eſſe majus Parallelogrammo A F.



Eſt enim, per primam hujus, A G æquale C B: &, per quadrageſimam tertiam Primi, C F æquale F D. Itaque, per communem Notionem, totus Gnomo C B D F, ipſi A F Parallelogrammo æqualis. Sed C D majus eſt ipſo Gnomone: Quare & ipſo A F Parallelogrammo: Quod fuit demonſtrandum. Tanto autem eſt majus, quantum eſt E F Parallelogrammum.



Iam verò, ſi A F altiùs erigatur, quàm C D, vt in ſecunda Figura: majus etiamnum erit C D ipſo A F. Eſt enim, per primam hujuſce, A G æquale G B. Ablatis ergo vtrimque duobus Supplementis Parallelogrammi E B inter ſe æqualibus: erit C D tanto majus A F, quantum eſt E F Parallelogrammum.

PROBLEMA 8, PROPOSITIO XXVIII.
Campano 27.

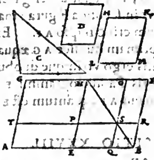
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι. δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων, τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν.

Super data recta linea, dato Rectilineo æquale Parallelogrammum aptare, deficiens ſpecie Parallelogrammo, quod ſimile ſit dato. Modò tamen Rectilineum datum majus non ſit Parallelogrammo, quod ſuper dimidio lineæ datæ, ſimile Parallelogrammo dato conſtituitur.

Sit

Sit data linea A B, datumq; Rectilineum C: datum verò Parallelogrammum D. Volo ſuper linea A B ſic deſignare Parallelogrammum æquale Rectilineo C, vt deficiat ſpecie Parallelogrammo, quod ſit ſimile Parallelogrammo D. Oportet autem C non eſſe majus Parallelogrammo, ſuper dimidium datæ lineæ AB collocato, ſimili eidem D Parallelogrammo. Alioqui niteremur in præceptum antecedentis Propoſitionis.

Diuido AB per æqualia in puncto E: &, per decimamnonam hujus, ſuper dimidium B E, conſtituo Parallelogrammum E F, ſimile ipſi D. Tum ſuper tota A B, compleo Parallelogrammum A F G. Quum ergo C Rectilineum, non ſit majus E F Parallelogrammo: ſi ſit eidem æquale, erit Parallelogrammum E G quale voluimus, per vigeſimam hujus. Eſt enim ſimile ipſi E F: quum ſit eidem æquale & æquilaterum. Sin erit C minus, auferatur exceſſus ab ipſo E F per ea quæ demonſtrauimus ad quadrageſimamquintam Primi: cui exceſſui ponatur per vigeſimamſextam hujus, æquale Parallelogrammum H K L M, & ipſi D ſimile. Ducam igitur in E F Parallelogrammo, Dimetientem B N: Et reſecabo ex F N, partem N O, æqualem lateri H K: Et ex E N, partem N P, æqualem lateri H L: Et ducam O Q & R P, quæ ſe ſcindant in puncto S: quæq; mutuò æquidiſtent lateribus totius Parallelogrammi A F. Eritq; interſectio ipſarum in Dimetiente B N, per vigeſimamquartam hujus: quia N S æquale & ſimile ipſi H M. Producta demùm R P in A G ad punctum T, dico Parallelogrammum A S eſſe quale proponitur. Deficit enim ſpecie, Parallelogrammo Q R, quod eſt ſimile N S Parallelogrammo, per vigeſimamtertiam hujus: atque ob id, ipſi H M: quapropter & ipſi D. Sed & æquale ipſi C Rectilineo. Nam quum A P, per primam hujus, ſit æquale E R: &, per quadrageſimamtertiam Primi, E F æquale S F: erit, per animi Notionem, ipſum A S, Gnomoni æquale: At Gnomon ipſi C æqualis: eſt enim N S exceſſus totius E F ſupra C Rectilineum. Quare & A S ipſi C Rectilineo æquale. Et idipſum ſuper linea A B conſtitutum,



defi

deficit ſpecie Parallelogrammo QR (quod eſt ſimile ipſi D dato): Quod faciendum fuit.

Hoc autem Theorema cum judicio tractandum eſt: vt etiam hoc ipſo loco annotauit Nicolaus Tartalea Brixellenſis, vir in re Geometrica ſeriò verſatus.

Sit enim, vt ipſe in exemplum proponit, area C Rectilinei, vigintiduorum pedum: & AB lineæ longitudo, duodecim: ſed D Parallelogrammi longitudo, ſit ſua latitudine duplo major. Tum ſi ponatur BE longitudo: quum ipſa ſit 6, erit BF 3. Ac tum AS conſtitui non poterit in Parallelogrammum quale quærimus: nempè, quin ſit majus ipſo EF. Nam EF erit 8 pedum. At ſi ponatur BE latitudo, erit BF longitudo 12: & EF Parallelogrammum, erit 72. Ac tum demùm ſtabit Problema. Quamobrem ea cautio erit, ne longitudo in BE dimidio lineæ ponatur.

Hoc igitur Problema, vt nihil diſſimulemus, eo minùs Geometricum eſt, quo minùs vniuerſale. Quinetiam in errorem inducere poſſit bene exercitatos. Quod ego longiori ſermone non explicabo. Satis fuerit admonuiſſe de errore vitando.

PROBLEMA 9. PROPOSITIO XXIX.

Campano 28.

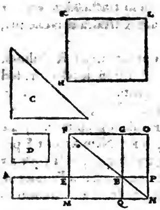
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ad datam lineam dato Rectilineo æquale Parallelogrammum prætendere, excedens ſpecie Parallelogrammum ſimile dato.

Sit data linea AB, datumq; Rectilineum C, & datum Parallelogrammum D. Volo ad AB lineam, applicare Parallelogrammum æquale Rectilineo C, excedens ſpecie Parallelogrammum D.

Diuido AB bipartitò in puncto E: Ac, per decimamnonam hujus, ſuper dimidiam BE conſtituo BEFC Parallelogrammum ſimile D Parallelogrammo. Tum, per vigeſimamſe-

xtam hujuſce, facio H K L Parallelogrammum, ambobus C & B E F G æquale, & ipſi D ſimile: ac proindè ipſi B E F G.



Et quia H K L majus eſt ipſo B E F G, & eidem ſimile: majora quoque ſunt latera K H & K L, lateribus F E & F G. Producantur ergo F E & F G ad æqualitatem ipſorum K H & K L: & perficiatur Parallelogrammum F M N O, ſimile & æquale ipſi H K L, ac proindè æquale vtriſque C & E G: & inſuper, ſimile ipſi E G, per vigeſimam hujus: ob idq;, circa eandem Dimetientem per vigeſimamquartam ejuſdem: quæ Dimetiens ſit F N, educta per punctum B. Et producatur A B, donec ſecet O N in puncto P. perficiaturq; Parallelogrammum A N. Quod dico eſſe quale voluimus: ſcilicet, excedere Parallelogrammum D, Parallelogrammo Q P, quod eſt ſimile ipſi D.

Id verò conſtabit, protractâ G B, donec ſecet M N in puncto Q. Eſt enim, per primam hujus, A M æquale M B: &, per quadrageſimamtertiam Primi, communémque Notionem, æquale ipſi G P. Si ergo vtrique addatur E N: erit & per animi Notionem, A N æquale Gnomoni E N G. Atqui Gnomo eſt æqualis ipſi C Rectilineo: quum totum F M N O Parallelogrammum, poſitum ſit æquale vtriſq; C & E G. Quare A N eſt æquale ipſi C. Sed & ſimile ipſi E G, per vigeſimamtertiam hujus: ac proindè ipſi D, per vigeſimam ejuſdem: Quod facere oportuit.

PROBLEMA 10. PROPOSITIO XXX.

Campano 29.

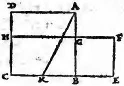
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην, ἄκρον ϗ μέσον λόγον τεμεῖν.

Datam rectam lineam ſecundùm extremam & mediam rationem diuidere.

Quid ſit lineam ſecundùm mediam & extremam rationem diuidi,

diuidi, oſtendit tertia Definitio hujus Sexti.

Sit data linea A B diuidenda ſecundùm mediam & extremam rationem. Ex ipſa A B deſcribo Quadratum A B C D:&,per antecedentem, applico ad latus B C, Parallelogrammum C E F, æquale Quadrato A C, excedens ſpecie Parallelogrammum eidem A C ſimile: & latus F H æquidiſtans C E, ſecet lineam A B in puncto G. Dico lineam A B eſſe diuiſam ſecundùm mediam & extremã rationem, in ipſo G puncto: eſſe ſcilicet A B ad B G vt B G ad G A.



Quum enim B F ſit Quadratum, nempe ſimile ipſi A C: duæ B G & G F ſunt æquales. Sed & G H ipſi A B æqualis: vtpotè æqualis ipſi A D, per trigeſimamquartam Primi. Et quia A C & H E ſunt æqualia, dempto ab vtroque C G, ſupererunt D G & G E æqualia. Quumq; angulus G vnius, ſit æqualis angulo G alterius: erunt ipſorum latera reciprocæ rationis, per decimamquartam hujus. Quapropter H G ad G F vt B G ad G A. Et quia A B eſt æqualis H G, & G F ipſi B G: erit A B ad B G vt B G ad G A: Quod erat conſtitutum.

ALITER probatur ex ſecunda parte decimæſeptimæ hujus. Conſtat enim D G eſſe id quod ſit ex A B in A G: item B F eſſe Quadratum ex B G. Quare tres lineæ A B, B G & G A ſunt proportionales: Quod erat faciendum.

THEOREMA 22. PROPOSITIO XXXI.

Campano 30, Theoni 32.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Si duo Triangula ad vnum angulum ſic conſtituantur, vt duo latera duobus lateribus mutuò ſint æquidiſtantia, & eadem inter ſe proportionalia: duo reliqua ipſorum latera in directum erunt, & linea vna.

Sint duo Triangula A B C & C D E, ad angulum A C D ſic conſtituta, vt latus A B æquidiſtet lateri D C, & A C ipſi D E: ſitq; A B

BA, vt BA ad BD. Itaque, ex Conſectario decimænonæ hujus, Species quæ ex BC prima, ad eam quæ ex CA ſecunda, ſimiliter deſcribitur, eſt vt BC prima, ad CD tertiam: itemq; Species quæ ex CB prima, ad eam quæ ex BA ſecunda, ſimiliter deſcribitur, eſt vt CB prima ad BD tertiam. Species igitur quæ ex BC, ad eas quæ ex CA & BA ſimul, eſt vt BC linea ad BD & DC ſimul. Atqui BC æqualis eſt ipſis BD & DC. Æqualis eſt igitur Species quæ ex BC, duabus quæ ex CA & BA ſimiliter deſcribuntur: Quod erat demonſtrandum.

HVIVS Demonſtrationis concluſio ſimplex (eſt enim citra auctoritatis teſtimonium) apertior eſt, & obſcuritatem tollit. Si quis verò rationem à ſe exigere velit, ſic expendat: Species quæ ex AC, ad Speciem quæ ex CB ſimiliter deſcribitur, eſt vt DC ad CB, per ipſum Conſectarium decimænonæ & Conuerſam proportionalitatem: itemq; Species quæ ex AB, ad eam quæ ex ipſa BC ſimiliter deſcribitur, eſt vt BD ad eandem BC. Iam verò, ponatur Species AC prima, & Species BC ſecunda: linea verò DC tertia, & BC quarta. Et inſuper, Species AB quinta, linea verò BD ſexta. Ac tum, ex vigeſimaquarta Quinti, erunt Species AC prima & Species AB quinta ſimul, vt linea DC tertia & BD ſexta, ad BC quartam. Atqui BC linea eſt æqualis duabus BD & DC. Igitur & Species quæ ex BC, æqualis eſt duabus quæ ex AC & AB: Quod fuit demonſtrandum.

ALITER. Similes Figuræ duplam inter ſe habent rationem quàm ſimilis rationis latera, per vigeſimam hujus. Species igitur quæ ex BC, ad Speciem quæ ex CA ſimiliter deſcriptam, erit vt Quadratum quod ex ipſa BC ad Quadratum quod ex CA: quum vtrimque ſit dupla ratio quàm laterum. Eodem modo quæ ex BC Species, ad eam quæ ex BA ſimiliter deſcribitur, erit vt Quadratum ipſius BC ad Quadratũ ipſius BA. Quapropter & ſicut Species quæ ex BC ad duas quæ ex CA & BA, ſic Quadratum quod ex eadem BC ad duo quæ ex CA & BA Quadrata. At Quadratum quod ex BC, æquum eſt Quadratis quæ ex CA & BA, per quadrageſimamſeptimam Primi. Quare ſpecies quæ ex BC, æqualis eſt duabus quæ ex CA & BA ſimiliter deſcriptis Speciebus. Quod fuit demonſtrandum.

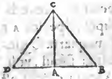
a. Hæc igitur generatim complectitur Pythagoricam, ſcilicet

quadrageſimamſeptimam Primi: & per ipſam (quodam tamen veluti præpoſtero modo) probatur. Illa enim ex hac innoteſcere debuit. Geometria quippè generatim & in vniuerſum, quantùm poteſt, proponit. Sed tamen Quadrati dignitas ſeparatam ac peculiarem ſibi demonſtrationem aſſumere potuit.

Conuerſa autem hujuſce, ex Campani Demonſtratione, erit ejuſmodi.

Si qua ab vno laterum Trianguli fit Species, æqualis fuerit ijs quæ à duobus reliquis lateribus fiunt, Speciebus ſimilibus ſimiliterq; deſcriptis: Rectangulum eſt Triangulum.

Sit Triangulum A B C: ſitq; Species quæ ex B C æqualis duabus quæ ex A B & A C ſimiliter deſcribuntur. Dico angulum A eſſe rectum.



Ponam angulum C A D rectum: Et connectam D C. Eritq;, per hanc trigeſimamſecundam, Species quæ ex C D, æqualis duabus quæ ex A C & A D ſimiliter deſcribuntur: Quapropter & æqualis ei quæ ex B C ſimili: quum hæc quoque ſit, ex poſitu, æqualis duabus quæ ex A C & A D. Erit ergo linea D C ipſi B C æqualis. Quare, per octauam Primi, angulus B A C rectus; Quod erat oſtendendum.

Poterit & ab impoſſibili demonſtrari, quomodo vltimam Primi probauimus. Quod ſatis intelliget, qui noſtram Demonſtrandi rationem illic perceperit.

THEOREMA 23, PROPOSITIO XXXIII.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις, ἐφ᾽ ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

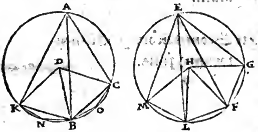
In Circulis æqualibus, anguli & qui ad Centra, & qui ad Peripherias conſiſtunt, inter ſe ſic habent, vt Arcus illos angulos ſuſcipientes. Sed & ſic Sectores inter ſe.

Sint Circuli æquales, A B C, cujus Centrum D: & E F G, cujus Centrum H: ſintq; ad Centra, duo anguli B D C & F H G: duo

duo item ad Peripherias, B A C & F E G. Dico primùm ipſos B D C & F H G angulos inter ſe, duosq; B A C & F E G inter ſe eam habere rationem, quam Arcus B C ad Arcum F G.

Connectam rectas B C & F G. Et continuabo ipſis duobus Arcubus alios Arcus æquales, ſiue eodem numero ſiue diſpari: ſitq; Arcus B K, per vigeſimamſeptimam Tertij, ipſi B C æqualis: duo verò F L & L M, ipſi F G Arcui, per eandem, æquales: nempè ducta linea B K, quæ ſit rectæ B C æqualis, per primam Quarti: & per eandem, F L & L M quæ ſint ipſi F G æquales. Hinc connectam K D & K A: indè verò L H & M H: tum L E & M E.

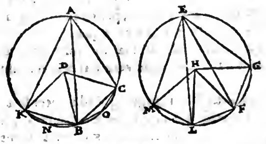
Et erũt, per vigeſimãſextã Tertij, anguli qui ad D, inter ſe æquales: & qui ad H, inter ſe: itéq; qui ad A, inter ſe æquales: & qui ad E, inter ſe. Quã multiplex igitur eſt Arcus K C ipſius Arcus B C, tam multiplex angulus K D C anguli B D C, & angulus K A C ipſius B A C. Itidem quàm multiplex eſt Arcus M G ipſius Arcus F G, tam multiplex angulus M H G, anguli F H G: angulusq; M E G, anguli F E G. Quapropter, ſi Arcus K C eſt æqualis Arcui M G, eſt & angulus K D C æqualis angulo M H G: & angulus K A C angulo M E G: & ſi major, major: & ſi minor minor. Quare, per ſextam definitionẽ Quinti, erit Arcus B C ad Arcum F G, vt angulus B D C ad angulum F H G, atque angulus B A C ad angulum F E G: Quod eſt prius.



Dico inſuper, eſſe Sectorem D B C ad Sectorem H F G, vt eſt ipſe Arcus B C ad Arcum F G. In ipſis B C & B K Arcubus, ſuſcipiantur duo ſigna N & O: & connectantur B N, K N: B O & C O. Eritq; Triangulum B D C, æquale Triangulo B D K: per definitionem Circuli & quartam Propoſitionem Primi: quum ſint anguli qui ad D, æquales. Et quoniam Arcus B C æqualis eſt Arcui B K, erit reliquus B C K, reliquo B K C æqualis: Quapropter angulus B O C æqualis angulo B N K, per vigeſimamſextam Tertij. Duo igitur Segmenta B N K & B O C, ſimilia, per decimam Definitionem

Tertij:

Tertij: quapropter & æqualia, per vigeſimamtertiam Propoſitionem ejuſdem. Totus igitur Sector D B C, toti Sectori D B K eſt æqualis. Eadem argumentatione erunt Sectores H M L, H L F, & H F G inter ſe æquales. Æquemultiplex igitur eſt Sector D C K, Sectoris D B C, vt Arcus C K ipſius Arcus C B: & Sector item H G M æquemultiplex Sectoris H G F, vt Arcus G M, ipſius Arcus G F. Si itaque fuerit æqualis Arcus C K, Arcui G M, erit & Sector D C K æqualis Sectori



H G M: & ſi major, major: & ſi minor, minor. Quare, per Conuerſam ſextæ Definitionis Quinti, vt Arcus B C ad Arcum F G, ſic Sector D B C ad Sectorem H F G: Quod erat demonſtrandum.

Ex iis conſequitur, vt eſt Sector ad Sectorem, ſic eſſe angulum ad angulum.

Libri ſexti Geometricorum Elementorum finis.

IAC

IACOBVS PELETARIVS
PONTO TIARTO S.

*Q*vum eſſem apud te in Biſſiano, multumq́ ac ſæpe de ſtudijs noſtris inter nos colloqueremur: dixiſti te Euclidem Ciuibus noſtris dare conſtituiſſe. Idq́ libentiùs te facturum eſſe ſignificaſti, quum meas demonſtrationes in ſex Libros Elementorum priores, tibi oſtendiſſem: quas tibi valdè probari ſenſi. Equidem, cùm mea, tum publica etiam cauſſa, conſilium tuum laudo, & mentem iſtam tibi gratulor. Neque enim ex amicis chariorem, aut ex noſtris hominibus doctiorem mihi optare poteram, qui meas lucubrationes noſtræ nationi commendaret, quàm te vnum. Quod enim de me dicere ſoles, me in ſcribendo tantum induſtriæ ponere, id ego in teipſum refero: cujus diligentiam & ſolertiam cùm in rebus omnibus, tum in ipſa ſcribendi facultate ſingularem admiror. Quumq́ ad meam vtilitatem ſemper cum Poëticis res Mathematicas conjunxerim, idem tibi vſuueniſſe video, & vehementer gaudeo, noſtrâ vtriuſque gratiâ: quò communitas illa ſtudiorum & voluntatum inter nos ſit illuſtrior. Ac tametſi patrio ſermone ſcribere deſij, nunquam tamen hanc meæ genti gloriam felicitatemq́ inuidebo, vt linguam copia, ſplendore, dignitate, omni deniq́ opum genere auctam & ornatam aliquando habeat. In quod ego officium, ſumma ope paulò antè nitebar. Id verò nulla ratione commodiùs fiet, quàm ſi optima quæque ad ipſam traducantur. Incumbe igitur, mi Tiarte, in eam, vt facis, prouinciam. Tibi enim in iſto, quo frueris, otio, nihil eſt quod majori gloriæ aut ornamento eſſe poſſit. Demonſtrationes meas ad te mitto. Ex quibus quicquid laudis à temporum memoria oſtenditur, id te mecum participare cupio. Quinetiam tu apud noſtros non dubito quin majorem gratiam ſis conſequuturus, quàm ego: qui jam aliud nihil expecto, quàm vt me primo quoque tempore deſertorem appellent. Habent tamen à nobis alia non vnius generis officiorum monumenta: quæ vtinam tam grata ſint, quàm ab animo liberali ſunt profecta. Nunc ad Romanos tranſeo. A quibus ampliorem honeſtioremq́ conditionem neſcio quo augurio mihi

O poll

polliceor. Ea enim gens omni memoria, quos ſemel in fidem recepit, ſanctiſsimè retinuit, & fortiſsimè propugnauit. Galli verò externorum vnicè amantes, & ſuorum egregij contemptores ſemper fuerunt. Quæ res, opinor, effecit, vt me tandem aliquando Gallum profiterer, & ad exteros transfugerem. Sed heus tu, inquies: quò te is perditum? Eiuſmodi mores nemo Romanus æquo animo feret. Equidem illos aut omninò mihi exuendos, aut gnauiter diſsimulandos eſſe video, niſi quòd cauſſam meæ defectionis probaturus ſum: &, quod caput eſt, in fide permanebo. Sciunt enim qui me norunt, quàm ſim firmus in retinendis conſilijs. Sed hæc poſteriora quanquam tecum iocatus ſum, tamen ridentem dicere verum nil vetat. Ad Euclidem redeo: quem, vt inſtituiſti, Gallicè tractabis: hoc eſt, per te, ſplendidè: &, per patriam, opiparè. Neque enim tibi verba innouare erit religio in argumenti nouitate. Quæ quum ſuo charactêre inſignita erunt, neque lucem reformidabunt, neque ciuitate reijcientur. Demonſtrationes noſtras conciſas illas quidem, ſed tamen, ni fallor, appoſitas comperies. Laconiſmum verò, ſi videbitur, longiùs extendes. Licet enim diffuſas Demonſtrationes non probem, tamen noſtros Ciues huic diſciplinæ minimè aſſuetos, prolixiùs docere non erit alienum. Siquid autem erit quod diligentiam noſtram aut animaduerſionem effugerit, id tu repones, amici officio. Nunquam enim doctorum hominum caſtigationes moleſtè tuli: ſed in hac imprimis tractatione veritatis, etiam imploro. Atque adeò, vt tu ſcis ſciens, ego mea ſcripta ad Momi lucernam diſpici & examinari cuperem: qui etiam in Euclidem animaduerterim, vt iam tum apud vos tibi communicaui. Quinimmò hanc editionem maturaui, vt ſi quæ eſſent minus rectè poſita (quidni verò futura ſunt?) in tempore deprehenſa, à me reponerentur in melius. Leuem quippè exiſtimationis iacturam eſſe iudico, quæ ſolidam emendationem in perpetuum oſtendit. Vellem tamen hæc à me ſine cauſa in dubitationem afferri. Vtut erit, ego non tam properationis pœnas ſum daturus (ſcis enim quandudum hoc ſaxum voluam), quàm ſecuritatis. Nam in ijs quæ procliuia viſa ſunt, me ferè præcipitem dedi. Scis etiam me, niſi in difficilibus immorari non ſolere. Sed nos de his pluribus verbis inter nos. Vale.

Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS
PETRO RONSARDO S.

Scis quanti te ſemper fecerim, mi Ronſarde. Me verò abs te non parui fieri exploratum habeo. Nam & amicitia noſtra memoriam mutuo teſtimonio poſteritati prodidimus. Quod certè ad vitam ipſam non parum affert momenti. Habet enim ea publica confirmatio ſingularem quandam delectationem. Sed & ad me valdè pertinere arbitror (neque te aliter eſſe affectum exiſtimo) vt omnis ætas intelligat, nos non modò temporum, ſed etiam animorum conjunctione copulatos fuiſſe. Igitur ex tuis ſcriptis voluptatem, & gloriam capio. Etenim ea demùm jucunda & honorifica laus, quæ ab ijs proficiſcitur, qui & ipſi in laude viuunt. Id tamen neſcio an in laudationis loco ſumere debeam, quòd tu me putas ab amore deſtitiſſe, & ea re ſaluum eſſe. Méne amoris expertem vnquam eſſe poſſe? An non ex ſcriptis meis conſtantiam, atque adeò obſtinationem meam perſpexiſti? Immò omninò amore abundo. Ego illâ, quam ita ſuperbam & faſtidioſam habui, jam vtor benigniore. Quid tu putas? Ex quinque illis quæ Amor oſtendit, præmijs baſium accepi. Sed non pergam tecum alludere. Amorem illum Platonicum ſignifico: hoc eſt, vt ſcis, diuinum. Ex quo eum quem percipio fructum, totum ſtatim communico: riualesq́; mihi paro, præter amantium morem. Atque adeò in hujus felicitatis partem, nullum mihi ſocium dari malim, quàm teipſum. Scis enim quanta fuerit dudum inter nos ſtudiorum conſenſio & conciliatio. Ex quo tempore etiam nobis tertius adſcriptus eſt Ioachimus Bellaius. Qui quum à nobis jam tanto temporum locorumq́; interuallo diſtractus ſit, quo in me ſit animo neſcio. Id de me ſcio, me illius memoriam magna cum beneuolentia tenuiſſe. Neceſſitudinem enim illam, quæ Muſarum beneficio & ſanctione conſtituta eſt, nulla vi temporum infringi poſſe judico. Quod tu perpetuò in noſtra amicitia retinenda declaraſti. Memini, quum eſſes etiamnùm adoleſcens, me aliquot annis ſuperiorem quanta beneuolentia obſeruares, Muſarum nomine: à quibus quum anteà ad regiam affectationem abductus fuiſſes: ad eas te recepiſti feliciſſimo poſtliminio. Varium e-

nim & omni numero Poëma ſcripſiſti: vt ea quæ hoc tempore ſunt apud noſtros in manibus, ſcriptorum genera, multi ſecuti ſint te magiſtro. Matheſeos verò ſtudium quantam dignitatem afferat operi Poëtico, nihil attinet commemorare, apud te præſertim in diſciplinis apprimè eruditum. Sed & ipſius Geometriæ lineamenta, quanuis in Poëtis minus elucere videantur: ea tamen vna ars cæterarum artium proculdubiò dux & magiſtra eſt. Noſti enim Platonis illud peruulgatum, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Ad hæc, incredibilem illa voluptatem affert, certiſſimâ ſpecie & conſecutione præceptorum. Ad quam ego te hortarer, niſi te ſcirem ad optima quaque tuo ductu amplectenda & conſequenda natum & educatum. Habes ad res ſummas, præcipua illa adminicula, ingenium, genus, fortunas: neq; tibi quicquam deeſt ad benè beateq; viuendum. Ego verò in eorum ſtudiorum commemorationem incido, animi mei alacritate quadam impulſus: quam mihi parit maximam, ejuſmodi meditatio. Quinetiam ad Mathematicas artes cohortationem nuper ſcribere ingreſſus ſoluta oratione, neſcio quo impetu in verſus erupi: quos è medio tranſſcriptos tibi mitterem, niſi id totum in aliud tempus reſeruaſſem. Eos tamen tibi coràm recitabo, ne me putes Phœbum deſeruiſſe, aut Muſas alienas habere: quum etiam Romana poëmata pangam. Sic ego ſum: ſic vtor otio meo: dum tu Principes amplecteris, & in gratia apud eos viuis. Tibi verò ſeriò gratulor iſtam fortunæ & genij facilitatem, cui & ad ſummorum hominum beneuolentiam retinendam, & ad operam ſtudijs & ſcriptis impendendam abundè tempus ſuppeditat. Ego autem nihil ex animi ſententia, niſi in ſeceſſione & ſolitudine poſſum ſcribere. Nos, vt ſpero, de ijs propediem otioſè colloquemur. Vale: & te à nobis tantum amari ne dubites, quantum nos abs te cupimus & confidimus. Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS
MAVRICIO SCÆVÆ S.

EXpoſuiſti aliquando mihi nonnullorum querelas, qui dicerent me nimiùm mihi viuere, atque hominum conſuetudini & gratiæ parum ſeruire. Quod genus expoſtulationis ſcis me non prorſus contempſiſſe, ſed tamen ſatis leniter tuliſſe:

tuliſſe : præſertim quum , vt præ te ferebas , id non tuo judicio , ſed ex aliena opinione proponeres. Quinetiam te meam cauſſam ſuſcepiſſe, & iniquos de me ſermones depuliſſe intellgebam: quod ipſum mihi pro noſtra amicitia gratiſſimum fuit. Fateor, Scæua, me artificia illa beneuolentiæ colligendæ exquiſitè non obſeruare. Probitate enim amicitias mihi comparandas & conſeruandas ſemper exiſtimaui potiùs, quàm gratioſa commendatione, aut affectata diligentia: quanquam , quum opus fuit, mihi non defuerunt adminicula fouendorum hominum. Sciunt ij qui me norunt , quanta fuerit temporum meorum varietas : quam non tam facile ſuſtinuiſſem, niſi mihi eſſet aliqua non malè ſubducta ad viuendum ratio. Scio ego quàm facilè incidere ſoleam in ſermones hominum : immò adeò , quàm facilè mea fortuna inuidos & obtrectatores inueniat. Quid dico fortunam? fatum dicere debui. Neque enim felicitate inuidiam mihi concitaui: an virtute, neſcio : certè id operam dedi, ne meo merito. Mea ſic ſemper fuit vitæ ratio : Qui mihi res ſuas bona fide commiſerunt , à me nunquam decepti ſunt : qui de mea voluntate non obſcurè dubitarunt , quam alioqui perſpectam non haberent , ijs non admodùm ſuccenſui : ſed vt de me quamoptimè ſentirent ſedulò curaui. Qui verò meam fidem tentare, aut ſimplicitatem intercipere conati ſunt, eorum conſilia aut arte , aut patientia , aut diſtractione eluſi. Qui ſimulatque ſibi ereptum ſenſerunt quod à mea facilitate ſibi promiſerant, ibi repente ſimultates gerere cœperunt , à me certè non ortas, ſed ab ipſorum artificijs. Nihil enim grauiùs deteſtor, quàm aſtutias: quas ne meo quidem commodo ferre poſſum. Eas autem explorare & olfacere meo periculo didici, ſæpe ab amicis deſertus , non ſimul etiam proditus. De quo apertiùs eſſem conqueſtus, niſi me ad lenitatem finxiſſet natura , ad æquabilitatem Philoſophia: qui ne inimicis quidem reſtiti laceſſitus , niſi ijs quos ſalus mea rebus miſſos facere non potui. Nemo vnquam ad conquirendas amicitias propenſior, nemo eorum quibuſcum vixi, ſtudioſior fuit , quàm ego ante hoc tempus fuerim. Id quia nimis accuratè feci, multi omnia à mea lenitate ſibi deberi arbitrati ſunt : neque jam integrum mihi eſſe putant à meo more diſcedere. Siquid de illa ſalutationum conſuetudine præterij , ſi inuiſendi officium intermiſi , ſi adeundi copiam non feci , ſi colloquendi facultatem non dedi , me moroſum , me ſingularem eſſe queruntur. In eam verò partem liberalitatis deinceps , ſi potero, non peccabo : ne à me ſit alijs peccandi occaſio. Me jam tem-

pus admonet, vt eam quam ipſi me docuerunt, cautionem mihi adhibeam: & meam familiaritatem abuti deſinam cum ijs qui familiaritate vti neſciunt: Si modò hoc conſilium mihi ratum eſſe poterit: vix certè erit. Noui enim me, quàm ſim φιλανθρωπίας *morbo obnoxius. At enim tempori ſeruiendum. quaſi verò quicquam interſit, vtrum tempori cedas, an ſeruias. Ego quum multorum arbitrio viuere non poſſim, meo modo aliquando mihi viuendum eſſe ſtatui. Totam eam amicorum turbam, qui omnia temporis cauſſa faciunt, non officij, à me excutiam: paucos mihi aptos retinebo, ſi multos non liceat: quos ego tanti faciam, vt quum ab ijs me amari ſenſero, cæteros, qui me non amabunt, neque amicitiæ vim tenere, neque virtutis amantes eſſe putabo. Alij, dum verſor in ſolitudine, dum intra eos quos mihi Philoſophia circumdedit cancellos, me contineo: ſe molliter curent: per me licet. Meas res aduerſas, quibus iſti me oppreſſum eſſe putant, faciliùs fortaſsè feram, quàm ipſi ſuas, in quibus volutantur, delicias. Intereà, ſiquid præter ſpem acciderit, aut in melius interpretabor, aut arte corrigam: ſiquid boni, id in lucro deputabo, ſicut me Comicus docuit. Si in ea vita fabula mihi felicitatis perſona non obtigerit, virtutis certè non deerit. Gaudebo minus, at minus dolebo. Id verò pro mea parte enitar, vt ad omnem vitæ ſtatum ſubſidia mihi parare poſſim. Præter hæc, non tam laborabo quibus charus ſim, quàm quibus charus eſſe debeam. De multis hactenus & priuatim & publicè bene merui. Qui ſi in officio aliquando erunt, eorum voluntati, quoad potero, non deero: & meam operam bene collocatam eſſe lætabor: ſi minus, meorum meritorum & laborum conſcientiâ me conſolabor. Sed quàm vellem, vt ij qui meam ab officio, vt ipſi expoſtulant, ceſſationem accuſant, de meis laboribus cognoſcere & judicium ferre didiciſſent: ij, vt opinor, me de tota ea accuſatione abſolui paterentur. Sed in hac re non dubito quin æquis rerum æſtimatoribus cauſſam meam ſim probaturus. Eos qui aut præſumpto quodam ſtudio, aut ſimulatione omnia metiuntur, nihil morabor. En Euclidem mea in Rempub. perpetuæ voluntatis nouum obſidem offero. In quo vtinam aliquando te occupatum videremus, Scæua. Tum demùm intelligeres, quanta fruantur voluptate ij, qui ſe à multitudine ad tempus remouent: quanquam id te aliquando expertum eſſe, res ipſa oſtendit. Singulare enim ſpecimen è ſolitudine edidiſti. Sed ea, quam nos in te conſpicimus, ingenij ſolertia majus quippiam*

à te

Digitized by Google

à te requirebat. Te Geometria poſcere videbatur. Quod à te an expectare debeamus, in te poſitum eſt. Si animum induxeris, nihil eſt quod in Mathematica perceptione non ſis effecturus. Te quidem ætas affecta, te minus firma corporis conſtitutio à laboribus auocant. Scio te valetudini operam dare oportere. At illa, mihi crede, ſtudiorum alacritas, ex ſumma animi delectatione, corpus tibi confirmabit. Homini tam diuinis rebus dedito non vacat ægrotare. Non valet qui ſine ſtudijs viuit. Quinimmò otium abſque literis mors eſt, & viui hominis ſepultura. Id verò etiam mea cauſſa magnoperè expecto. Nam quum te ad ſolitudinem reductum viderint ij, quibus ſermonem dare ſoleo, eos ſubitò æquiores ex tua ſeceſſione ſum habiturus. Vale. Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS IOANNI FERNELIO FRANCIÆ ARCHIATRO S.

SÆpenumerò mihi cogitanti de rerum conditione & natura, id vnum in vita difficillimum videri ſolet, meditationem cum ipſa actione coniungere: id eſt, mentis functiones ad vſus externos traducere: non quòd vtrumque munus ad hominis ingenium non ſit valdè accommodatum, ſed quòd ſpeculandi delectatione animus ſuapte naturâ præcipuè capiatur: à qua quum ad agendum abſtrahitur, minus officioſus eſſe cogitur, cùm ex inſolentia, tum quòd ad res obeundas alieno auxilio indigeat. Quo fit vt pauci ſint, qui ad animi ſtudia & ad rerum tractationem æquabiliter ſint idonei. Te verò, Ferneli, non poſſum non laudare, qui vtrumque ea felicitate perficis, vt in otio cum actione: & in negotio cum meditatione verſari videaris. Quæ enim in Mathematicis, quæ in Philoſophia, quæ in re medica tam diligenter ſcripſiſti, mihi in animum ſubijciunt, quàm rari ſint noſtrâ ætate qui cum iudicio ſcribant. Quo verò ſucceſſu, quâque exiſtimatione Medicinam facias, res ipſa loquitur: Cui & Regiæ valetudinis primaria prouincia incumbit: & publicæ curationis ſpectata fides. Sed hæc commemoratio ad epiſtolæ argumentum

mentū minus pertinet : niſi quòd gratulationis officium libenter impertiri ſoleo ijs, quibus aut amicitiæ, aut dignitatis nomine id à me deberi puto. Venio ad eam occaſionem quæ mihi ad te ſcribendi præcipua eſt : nimirùm vt apud te meæ cauſſæ defenſionem præoccupem, & ante litem mihi judicem parem : eorum videlicet more, qui de prælio ſuſpicantes, hoſtis aduentum anteuertunt. Exiſtimo non defuturos qui Commentationum noſtrarum in Euclidem, editionem non æquo animo ferant. Ac primùm omnium obijcient, quòd aliorum Demonſtrationes nobis ſumamus, & vtamur pro noſtris. Deinde, opinor, feſtinationem noſtram improbabunt, quòd ne dimidium quidem operis proferamus. Sed prior illa reprehenſio, vt confido, non magnum pondus inuidiæ eſt habitura, apud eos qui æquiori judicio rem expenderint. Qui enim nos accuſabunt, non jam Campanum, ſed Theonem ipſum accuſent oportet: quorum ille alter nihil ferè habet, quod à Theone non ſit mutuatus : hic verò ipſe aliorum probationes per manus traditas congeſſit. Quid enim? an exiſtimamus Propoſitiones Geometricas ab Euclide in ordinem eſſe redactas, quæ non antè ſuis aſſertionibus confirmatæ eſſent? an verò Theorema de laterum Trigoni Rectanguli potentijs tam celebre, à Pythagora Samio relictum fuiſſe putamus, niſi ſua demonſtratione munitum? Quid ante eum, Thaletem? quid poſt eum, Platonem, Hippocratem Chium, Architam Tarentinum, ac totam Geometrarum nationem feciſſe putamus? an denique Euclidem Problema illud ab Oraculo propoſitum de Cubo duplicando, prætermiſſurum fuiſſe credemus, ſi conſtitiſſet demonſtratio? Immò adeò, idem ipſe auctor quid aliud ferè ad Geometriam attulit de ſuo, quàm ordinem? Denique quid eſt in omni ſcriptorum genere, quod quiſquam ſibi vendicare aut propriè ſuum dicere poſſit, præter collocationem? Nobis verò cur inuidebitur, ſi ea noſtro nomine emiſimus, quæ ſic excoluimus, vt aliena dici non poſſint? quum interim multa protulerimus, quæ non modò non tralatitia ſunt, ſed noua omninò & hactenus non cogitata. Quæ à Theone & Campano accepimus, meliora effecimus, aut concinnitatis ſpecie, aut compendij dignitate. Demonſtrationes enim, noſtra ſententia, breues & cordatas eſſe oportet. Quibus rebus quum ad eas meditationes pulcherrimas incenderimus animos ſtudioſorum, inuidiam, ſi qua in nos orta fuerit, publica approbatione remouebimus. Quod ad alteram offenſionis partem attinet, qui nos de properatione arguent, ſic habebunt : nos, quum ad ſcribendum

dum

dum accedimus, cogitare non ſolere, quàm magnum opus, ſed quàm vtile ſimus daturi. Planorum argumentum à Solidorum materia ſeorsùm exhibuimus. quid tum? ſi, quod peculiarem habet tractationem, ſeparatim tradidimus? Cujus editionis retardationem commodiùs profectò ſuſtinuiſſem, quàm Geometriæ ſtudioſi. Neque enim mihi homini Philoſopho tanta honoris & laudis, quanta hominibus ingenuis, ſcientiæ & doctrinæ cupiditas eſſe debet. Hos libros velut arrhabonem quendam exhibemus, dum opus integrum extruere pergimus, neque laborem intermittimus. Ac tametſi hi libri priores, totius ædificij ſpeciem oſtendunt, & ichnographiam continent: velim tamen à nobis ſe nihil accepiſſe Reſpublica exiſtimet, donec opus abſoluerimus, Deo Optimo Max. qui nos ad hoc munus deſtinauit, approbante. Tu verò, Ferneli, ſi factum noſtrum probaueris, magnum nos laborum noſtrorum fructum percepiſſe exiſtimabimus. Sin erit in quo à nobis diſſentias, id etiam in vtilitatem emendationis conuertemus. Scis enim in noſtra ſcribendi profeſſione quid nobis ſit exoptandum: ſcilicet, doctos homines nobis ex animo, non, vt in cæteris ſcriptorum generibus fieri ſolet, gratiæ cauſſa ſuffragari. Vale. Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS

HIERONYMO CARDANO S.

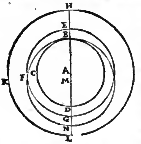
QVum neque vbi terrarum eſſes ſatis compertum haberem, neque eſſet cui commodè hanc ad te epiſtolam darem in hac rerum & temporum perturbatione, eam publicè ad te mittere conſtitui: præſertim quum argumentum ipſum penè eſſet publicum. Illud enim officium litterarum, quod priuatim in amicos conferri ſolet, non putabã te à me requirere: propterea quòd ipſa Philoſophia commendatio optima animorum conciliatrix, ad conſeruandam beneuolentiam ſatis per ſe habet momenti. Tum publica illa ſcribendi profeſſio efficit, vt eos, qui longo interuallo diſtracti ſunt, præſentes ſemper habeamus, & cum ipſis, immò cum mortuis familiariter ac ſæpe colloquamur. Atque in meo dolore, quòd doctiſſimorum hominum, qui paulò antè vixerunt, conſuetudine aut notitiã non ſim potitus, hac ſola conſolatione vtor. Copernici

memoriam ſanctiſſimè colo. Monumentum enim nobis reliquit ſui nominis & ingenij ſempiternum. Gemmæ Friſij mortem, quæ proximè ad nos allata eſt, pro eo ac debui, moleſtè tuli: ad quem etiam ſcribere inſtitueram, & me breui eum viſurum ſperabam. Iam tum anteà Eraſmus Reinoldus, Copernici doctiſſimus interpres & imitator, deceſſerat. Schonerum, Stifelium: Fracaſtorium, Gauricum, multóſque noſtræ Matheſeos principes, quos Gemania, & Italia item veſtra aluit, nunquam vidi: ea quidem cauſſa, quòd neque ætate æqualis, neque temporis ratione ſatis inſtructus eſſem ad proficiſcendum. Quorum omnium deſiderium, benignâ recordatione ſuſtineo, & eorū ſcriptis legēdis leuius fero. Te verò, Cardane, Lugduni, vndè nunc ad te ſcribo, familiarem diebus multis habui: quum in Scotiam tibi iter eſſet. Quæ notitia mihi chariſſima & jucundiſſima fuit. Erat tibi tum inter manus, Librorum tuorum quos de Subtilitate ſcripſeras, recognitio. Atque, vt ad inſtituti mei rationem explicandam ingrediar, memini te mihi locum illum oſtendere, de duabus lineis, quæ quum coïtionem affectare videantur, nunquam tamen concurrunt. Ex quo tempore non deſtiti mecum diſpicere, quánam ratione id in Geometria conſtaret. Nam quū firmiſſimo præjudicio mihi propoſuiſſem, Geometriam ejuſmodi eſſe, quæ ab omni repugnantia & Paralogiſmo remota eſſe deberet: eam tandem comperi ſuis quidem miraculis non carere, ſed probationis ſubſidium nunquam deſiderari. Demonſtrationem igitur à nobis perueſtigatam, tertio Commentationum noſtrarum libro adſcripſimus. Alterum item de angulo contactus Paralogiſmum à te propoſitum diſſoluimus. In quo vt etiam intelligerent ſtudioſi, nos rationibus noſtris nihil deeſſe voluiſſe, tuum judicium nobis adhibendum eſſe duximus: & alteram confirmationem huic loco etiam pleniorem ſubſcripſimus. Atque inprimis hoc nobis eſt præmittendum,

In Circulis, anguli qui fiunt à Diametro & Peripheria, ſunt æquales.

Sint enim ſuper Centro A, *duo Circuli* B C D B *&* E F G E, *quorum Diametri* B D *&* E G. *Et ſecet* E G *ambos Circulos in punctis* E, B, D, *&* G. *Aio duos angulos* C B D *&* F E D *eſſe æquales. Nam ſi ſit* F E D *major ipſo* C B D *(neque enim contrà,* C B D *major vllo pacto erit ipſo* F E D*): ac deſcribantur plures Circuli ſuper eodem Centro* A, *quorum*

quorum vnus hoc loco ſatis fuerit H K L H *: fiet tandem ex continuo augmento, angulus à Diametro & Peripheria, verbi gratiâ, angulus* K H L*, maior recto: Quod eſt contra ipſius Euclidis ſententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad* B *&* E*, inter ſe æquales: Quod fuit oſtendendum. Idem & de exterioribus iudicium.*



Neque in hac demonſtrandi ratione vllus eſt Paralogiſmus. Licet enim nulla ſit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos Rectilineos: attamen erit angulorum qui fiunt ex ſectione rectæ lineæ & Peripheriæ, aliqua collatio ad ipſos rectilineos. Ejuſmodi enim anguli, qui Mixti dicuntur, manifeſtè maiores & minores fiunt.

His ad hunc modum demonſtratis, aio Contactum Circulorum interiorem, non eſſe quantitatem. Super Centro M*, in eadem linea* H L *poſito, deſcribatur Circulus* B F N B*, tanto interuallo, quanto eſt Circulus* E F G E *: poſita ſcilicet* M B *Semidiametro, æquali ipſi* A E*: qui Circulus tangat* B C D B *Circulum in puncto* B*. Et manifeſtum eſt, angulum* F B D*, æqualem eſſe angulo* F E D*, propter æqualitatem Peripheriarum & Diametrorum: Quapropter & idem ipſe* F B D *erit angulo* C B D *æqualis. Igitur* C B F *contactus, nihil addit ad ipſum* C B D *angulum. Quare* C B F *quantitas non eſt: Quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonſtratio eorum, quæ illuc adduximus, Theorematum: quæ hoc loco repetere nihil attinet. Tu verò pro tuo otio omnia examinabis. De quibus quid ſentias, ſi mihi aut priuatim aut publicè ſignificaueris, pergratum mihi feceris. Vale.*

IACOBVS PELETARIVS
PETRO NONIO S.

NOn dubitabam, Petre Noni, quum noſtra in Euclidem commentationes ad te peruenirent, quin me erga te bene affectum, vel ipſo doctrinæ nomine, eſſes exiſtimaturus. Hæc enim noſtra Mathematicarum artium ſtudia ejuſ-

modi ſunt, vt eos qui ipſa amplectuntur, mutuo amore deuinciant. Quid enim veritate, quam nos tractamus, candidius? quæ major ad conciliandos animos vis eſſe poteſt, quàm ejus, quæ animorum perpetuitatem maximè teſtatur, ſcientia? Memini ego quum Mathematicis initiarer (quod quum tardè feciſſem, magna etiam intermiſſione, ob temporum meorum varietatem, vſus ſum) ac ſtudiorum ſucceſſione tua ſcripta euoluerem, me magna ſpe & alacritate fuiſſe incenſum, vt aliquando pari facultate & judicio ſcribere licêret. Librum de Crepuſculis abs te diligentiſſimè ſcriptum auidiſſimè legebam: & alterum item illum, quo in noſtrum Orontium animaduertis. Qui vtinam tam plauſibilem præ ſe ferret titulum, quàm eſt Mathematico, id eſt, vero argumento conſcriptus. ſed tamen veritate ipſa apud ſynceros animos nulla res potior debet eſſe. De me verò quum dico, animum quidem meum tibi teſtatum facere cupio: ſed interim mihi polliceor futurum, vt mihi in amore reſpondeas, ſimulatq; tibi innotuero: ſcilicet, vbi primùm hæ noſtra Demonſtrationes tibi in manus venerint. Non enim puto te ante hoc tempus de me audiuiſſe, qui patrio ſermone hucuſq; ferè ſcripſerim: cujuſmodi & Ars nautica abs te edita in tuorum manibus verſatur: & Algebram etiam abs te ſcriptam audio. Sed has ipſas Demonſtrationes ſine majori mea erga te beneuolentiæ teſtimonio exire nolui. Ac velim intelligas, me nihil magis optare, quàm te meorum ſcriptorum cenſorem mihi dari. Eaq; gratia maturo quantùm poſſum (neque properationem affecto tamen) laborum meorum publicationem, ne is mihi pereat fructus, quem ex veſtro omnium judicio, aut etiam caſtigatione, capere poſſum. Omninò enim aliter ſum affectus, quàm cæteri. Non me pudet doctorum hominum judicium quocunque meo diſpendio experiri: modò id tandem in meum commodum reponere ſperem. Quod in me quiſque animaduerterit, id in maximo exiſtimationis lucro deputabo. Cujus mihi ſatius eſt temporariam jacturam facere, quàm perpetuam. At enim, inquies, quid eſt quòd temporis beneficio non vteris? cur teipſum in conſilium non adhibes, moræ patientia? Rectè. Sed omnibus hominibus, mi Noni, procliue eſt vt peccent, etiam in veritatis luce, in qua ipſa offendere, alienum inprimis & inhoneſtum eſſe videtur. Emendatio non tam conſtat tempore, quàm conſilio. Conſilium verò ipſum ab amico præſtatur, & diuturni temporis vice eſt. In re noſtra tam lyncei eſſe non poſſumus. Nobis planè prouidentia illa præſcribit, vt

mutuas

mutuas operas praſtemus. Sed ego longiùs digredior. Ad me reuertor. Tuum erit, mi Noni, non tantùm amici nomine (quod tibi ingenua amoris profeſſio praſcribit) ſed etiam veritatis contēplatione (quò te publica vtilitas inuitat) meas lucubrationes, quatenus vacabit, examinare. In quo longè felicior fuiſſem, ſi tecum per locorum interuallum, communicare licuiſſet. Sed quid locorum interuallum mihi pratendo? Immò verò, fato quodam meo neque praceptorem in his ſtudijs, neque ſocium vnquam habui: ne in Gallia quidem noſtra. Meditatione omnia ſum aſſecutus. Qua occaſione ſymbolum illud ex Periandro mihi ſumpſi, μελέτη τὸ πᾶν. Qua verò aſſequi potui, ea libenter impertio. Idem verò abs te etiam expecto, mihiq́ gratiſſimum erit, ſi aliquando intellexero tibi amicitiam meam cura fuiſſe. Quod tum demùm intelligam, ſi me de ijs qua ad exiſtimationem meam & publicam vtilitatem pertinebunt, monueris. Vale. Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS PASCHASIO HAMELIO MATHEMATICARVM REGIO PROFESSORI S.

Mirabuntur, opinor, nonnulli, quòd in hac Demonſtrationum editione nimis de me ipſe diffidere videar: dum eorum ad quos ſcribo tam ſtudioſè fidem obteſtor, & opem imploro. Verùm eo conſilio id facio, vt palàm profitear quàm longè abſim ab eorum hominum confidentia, qui ambitioſè res ſuas oſtentant, & pari impudentia aliorum inuenta ſibi tribuunt. Quanta cura, quanta meditatione ſcripſerim, mihi conſcius ſum: quid praſtiterim, aliorum judicio relinquo. Equidem in meis lucubrationibus alijs, non ita ſupplex eſſe ſoleo. Sed in hoc Geometria ſpectaculo, nobis modeſtia perſona impoſita eſt, non oſtentationis. Multorum hominum & ſeculorum adjumenta huc conferenda ſunt. Tibi verò, Paſchaſi, id muneris pra cateris incumbit, vt tuam in hac re, quod facis, operam praſtes. Eam facultatem tua doctrina, quam aſſiduo ſtudio ſingularem comparaſti, tibi concedit: oportunitatem abundè ſuppeditat Regia illa profeſſio: illud verò in mea cauſſa officiū, noſtra etiam amicitia à te poſtulat. Vale. Lugduni. M.D.LVII.

Quæ ad hos ſex libros Elementorum contulimus præcipua.

NOVAS Demonſtrationes paſſim ad Euclidem adjecimus: quas ex firmiſſimis probationum fundamentis, Recto & Æquali, maximè ex Circulo, totius operis Geometrici archetypo, deprompſimus.

Demonſtrationes nonnullas Theonis & Campani, quum non ſatis probabiliter, aut non ſatis appoſitè confirmarent, emendauimus: cæteras concinniores clarioresq; reddidimus.

Improprias Demonſtrationes à Geometria excluſimus, illas ſcilicet, quæ Figurarum, quas vocant, ſuperpoſitionibus nitebantur.

Demonſtrauimus ad decimamſextam Tertij, quam nos decimamquintam fecimus, neque lineæ rectæ cum circulo, neque Circulorum inter ſe contactum, quantitatem eſſe: Idq; præter Euclidis ſententiam. Et paralogiſmos inde ortos à Geometria depulimus.

Ibidem explicauimus quânam ratione duæ lineæ in eodem plano, non paralleli, concurrere non poſſint: tum ex quo genere eſſet altera illarum oſtendimus. Dubitatio ſcilicet, jam tot ſeculis inter Geometras indiſſoluta.

Nouas Propoſitiones à nobis demonſtratas ſuis locis appoſuimus: nullas tamen in ordinem redegimus. Seriem enim Elementorum ab Euclide collocatam ſuæ integritati reliquimus: niſi ſiquando Campanum ſecuti ſumus, quum in varietate nonnihil compendij deprehenderemus. numerum tamen Theonis vbique ſubſcripſimus. Illas autem potiſſimùm de noſtris addidimus Propoſitiones, quæ ad effectionem Geometriæ pertinebant: vt ad ſcientiam vſum adjungeremus.

Principia Geometriæ nouis meditationibus illuſtrauimus, Punctum, Lineam, Superficiem, Circulum ipſum. Sed & Anguli naturam, conformationem, conſtitutionemq; hactenus non animaduerſam explicauimus ad duodecimam Definitionem Primi, tum ad decimamquintam Propoſitionem Tertij.

Quin

Quinti Libri Definitiones Geometricè declarauimus, eaſumq; ſuſpectam difficultatem ſuſtulimus.

Rerum naturam in Geometria tanquam in ſpeculo elucere, eamq; è Geometricis ſpeculationibus petendam eſſe docuimus: quod paſſim agnoſcent qui commentationibus noſtris operam daturi ſunt.

Euclidis verba non religiosè, ſed ſententiam fideliter ſequuti ſumus: & Latinè, quoad ejus fieri potuit, expreſſimus.

Ad Demonſtrationum autem formulas, vix mediocrem ornatum attulimus verborum. Apertam enim ſimplicitatem retinere maluimus, quàm nimis obſcuram diligentiam affectare. Atque haud ſcio an hoc argumentum Romanæ linguæ facultatem ſuperet. Geometria quippe ſe ad Latinos tum recepit, quum jam apud eos jaceret dicendi ſtudium. Quod quum dico, non jam Impoſſibilis vocem ſignifico, duram illam quidem M. Fabio, tamen Vlpiano receptam, Capite Non impoſſibile puto, Legis De Pactis: ſed alias ſatis multas, quæ arti ſic inhærebant, vt ab arte excuti non poſſent. Quinetiam integras periodos, nulla modorum aut numerorum ratione ſeruata, exhibere coacti ſumus: dum crebras notarum verborumq; iterationes fieri neceſſe fuit: argumento alioqui parum tractabili. Sed ceſſo de his admonere. Verborum enim curioſitas, ad rerum pondera (quas ſolas ſpectat Geometria) parum affert momenti.

Atque hæc ſunt quibus noſtram demonſtrandi Euclidis rationem exponendam eſſe duximus.

Quæ verò à nobis adjectæ ſunt Propoſitiones, ſic habent.

Libro primo.

Ad XV Propoſitionem.

Si quatuor lineæ ab vno puncto exeuntes, quatuor angulos fecerint, quorum bini oppoſiti æquales fuerint: binæ aduerſæ in rectum ſibi erunt & linea vna.

Ad XXIII.

Dato Triangulo Triangulum æquale & æquilaterum conſtituere.

Ad XXIX.

Si duæ rectæ lineæ, quæ duas parallelos ſecant, inter ipſas ad vnum punct

punctum coierint, duosq́ angulos alternos æquales fecerint, aut angulum exteriorem interiori ſibi oppoſito ex eadem parte æqualem, aut deniq́ duos interiores ex alterutra parte duobus rectis æquales: eæ duæ lineæ in continuum erunt & linea vna.

Ad XXXIIII.

Inter duas lineas interminatas ad angulum datum conjunctas, lineam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum alteri dato angulo æqualem. Oportet autem duos angulos datos duobus rectis eſſe minores.

Ad XXXVIII.

Datum Triangulum in duo æqualia partiri.

A puncto in vno laterum Trianguli ſignato lineam ducere, quæ Triangulum biſariam diuidat.

Ad XXXIX.

Si linea recta duo Trianguli latera per æqualia ſecuerit, ipſa erit tertio lateri æquidiſtans. Ex Campano.

Ad XLII.

Dato Parallelogrammo æquale Triangulum conſtituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Ad XLIII.

Si Parallelogrammum in duo Supplementa æqualia, duoq́ quantacunque Complementa diuiſum fuerit: duorum Complementorum dimetientes in continuum erunt, & vna totius Parallelogrammi dimetiens.

Ad XLIIII.

Super data recta linea dato Parallelogrammo æquale Triangulum conſtituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Ad XLV.

Propoſitis duabus Superficiebus rectilineis inæqualibus, exceſſum maioris ſupra minorem cognoſcere.

Ad XLVI.

Quæ circa Diametrum Quadrati Parallelogramma, ſua latera Quadrati lateribus æquidiſtantia habuerint, Quadrata eſſe oportet.

Ad XLVII.

Duo Quadrata inæqualia ad duo Quadrata æqualia reducere.

Si duo Triangula rectangula æquales ſubtenſas habuerint, Quadrata duorum reliquorum laterum vnius, erunt æqualia Quadra-

tis duorum reliquorum laterum alterius.

Propoſitis duabus lineis inæqualibus, potentiam majoris ſupra minorem cognoſcere.

Data Diametro, componere Quadratum cujus eſt Diameter.

Quadratum Diametri, duplum eſt Quadrati cujus eſt Diameter.

Ad XLVIII.

Propoſitis duobus Quadratis, alteri illorum Gnomonem reliquo æqualem adjungere. Et eſt Campani: quam tamen nos compendioſiùs demonſtrauimus.

Secundo libro nullas Propoſitiones interjecimus.

Libro tertio.

Ad VII.

Si duæ lineæ rectæ ab aliquo puncto Diametri exeuntes, angulos æquales cum Diametro fecerint: ipſæ ſunt æquales.

Ad XV, quæ eſt Theoni XVI.

Contactus duorum Circulorum interior, quantitas non eſt.

Contactus lineæ rectæ cum Circulo, quantitas non eſt.

Contactus duorum Circulorum exterior, quantitas non eſt.

Anguli qui fiunt à Diametro & Peripheria, ſiue intra ſiue extra Circulum: recti ſunt, & rectis rectilineis æquales.

Ad XVI.

Lineæ rectæ quæ Circulum ſecet, lineam rectam quæ Circulum tangat parallelam ducere.

Ad XXX.

Si in Circulo Triangulum rectangulum inſcriptum fuerit: latus recto angulo oppoſitum, Diameter erit Circuli.

Ad XXXV.

Si ab eodem puncto extra Circulum ſignato plures lineæ Circulum ſecent: quæ ex vnaquaque in ſui partem extimam fiunt Rectangula, inter ſe ſunt æqualia.

Si duæ lineæ ab eodem puncto ductæ, Circulum tetigerint, ipſæ inter ſe ſunt æquales. Atque hæ duæ poſteriores ſunt Campani.

Ab vno puncto extra Circulum ſignato duæ tantùm lineæ ad contactum Circuli demitti poſſunt.

Libro quarto.

Ad v.

Per tria data puncta in directam lineam minimè conſtituta, Circulum ducere.

Ad ix.

Quadratum Circulo circumſcriptum, duplum eſt Quadrati eidem Circulo inſcripti.

Ad x.

Super data recta linea Pentagonum æquilaterum & æquiangulū conſtituere.

Ad Librum Quintum nullas Propoſitiones addidimus, eodem quo neque ad Secundum, conſilio. Quæ enim cum Numeris tam conjunctam habent rationem, ſicut Secundi & Quinti materia, præter modum ampliari poſſunt, ac ſine vſu. Quinetiam ab hoc quinto reſcindendæ potiùs eſſent Propoſitiones, quàm vllæ adijciendæ: quod & nos illic monuimus.

Libro ſexto.

Ad ix.

Dato Medio proportionali, in data linea duo extrema reperire. Oportet autem medium datum dimidia parte lineæ datæ non eſſe majus.

Ad xxiii.

Propoſitis duobus Parallelogrammis æquiangulis, ſed non ſimilibus: ab vno illorum Parallelogrammum alteri ſimile reſecare.

Inter duas Superficies rectilineas mediam Superficiem rectilineam inuenire.

Ad xxxi.

Si quæ ab vno laterum Trianguli fit Species, æqua fuerit ijs quæ à duobus reliquis lateribus fiunt Speciebus, ſimilibus ſimiliterq́ deſcriptis: Rectangulum eſt ipſum Triangulum.

EVCL.



EVCLIDIS VITA, ex Suida.

Εὐκλείδης, μεγαρεύς. μεγάρων δὲ τῶν ἐν τῷ ἰσθμῷ φιλόσοφος καὶ τὴν ἐξ αὐτοῦ κληθεῖσαν μεγαρικὴν αἵρεσιν εἰσήγαγεν. ἣν δὴ καὶ διαλεκτικὴν καὶ ἐριστικὴν προσηγόρευσεν. γέγονε δὲ μαθητὴς Σωκράτους, μεθ' ὃν Ἰχθύας, εἶτα Στίλπων, ἔχον τὴν σχολήν. συνέγραψε διαλόγους, ἀλκιβιάδην, αἰσχίνην, κρίτωνα, φοίνικας, λαμπρίαν, ἐρωτικόν, καὶ ἄλλα τινά.

Diogenes Laërtius in dubio relinquit, Megarensis ne, an Gelous fuerit Euclides.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ.

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι οἶνον ἔβαινον,
Αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθει φόρτου ἑοῖο.
Τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη,
Μῆτερ, τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι ἠΰτε κούρη;
Εἰ μέτρον ἕν μοι δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα.
Εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις.
Εἰπὲ τὸ μέτρον ἄριστε γεωμετρίης ἐπίστορ.

Ἀνὰ γ' μέζων δοκοῦσι φέρειν.

ΕΠΙΓΡΑΜΜΑ ΠΑΛΑΙΟΝ.

Σχήματα πέντε Πλάτωνος, ἃ Πυθαγόρας σοφὸς εὗρε,
Πυθαγόρας σοφὸς εὗρε, Πλάτων δ' ἀρίδηλ' ἐδίδαξεν.
Εὐκλείδης ἐπὶ τοῖσι κλέος περικαλλὲς ἔτευξεν.

NESCIT LABI VIRTUS

A01 1461532

Digitized by Google